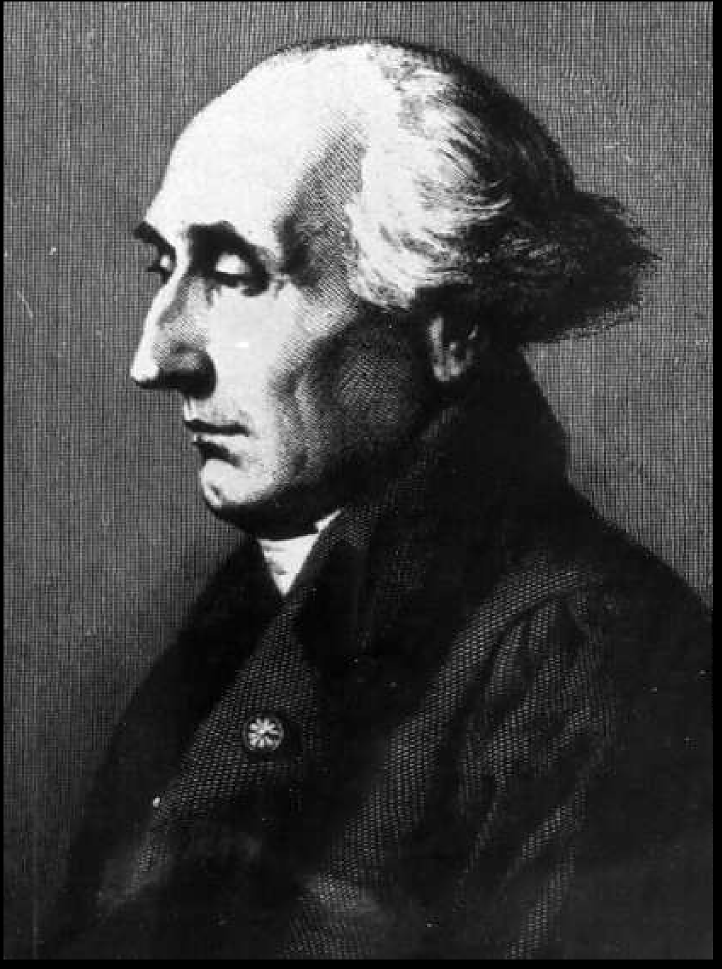
Discovery of Lagrange multipliers and Lagrange mechanics

Discovery of Lagrange multipliers and Lagrange mechanics



(1736 – 1813)

(Photo: Chr. Lubich)

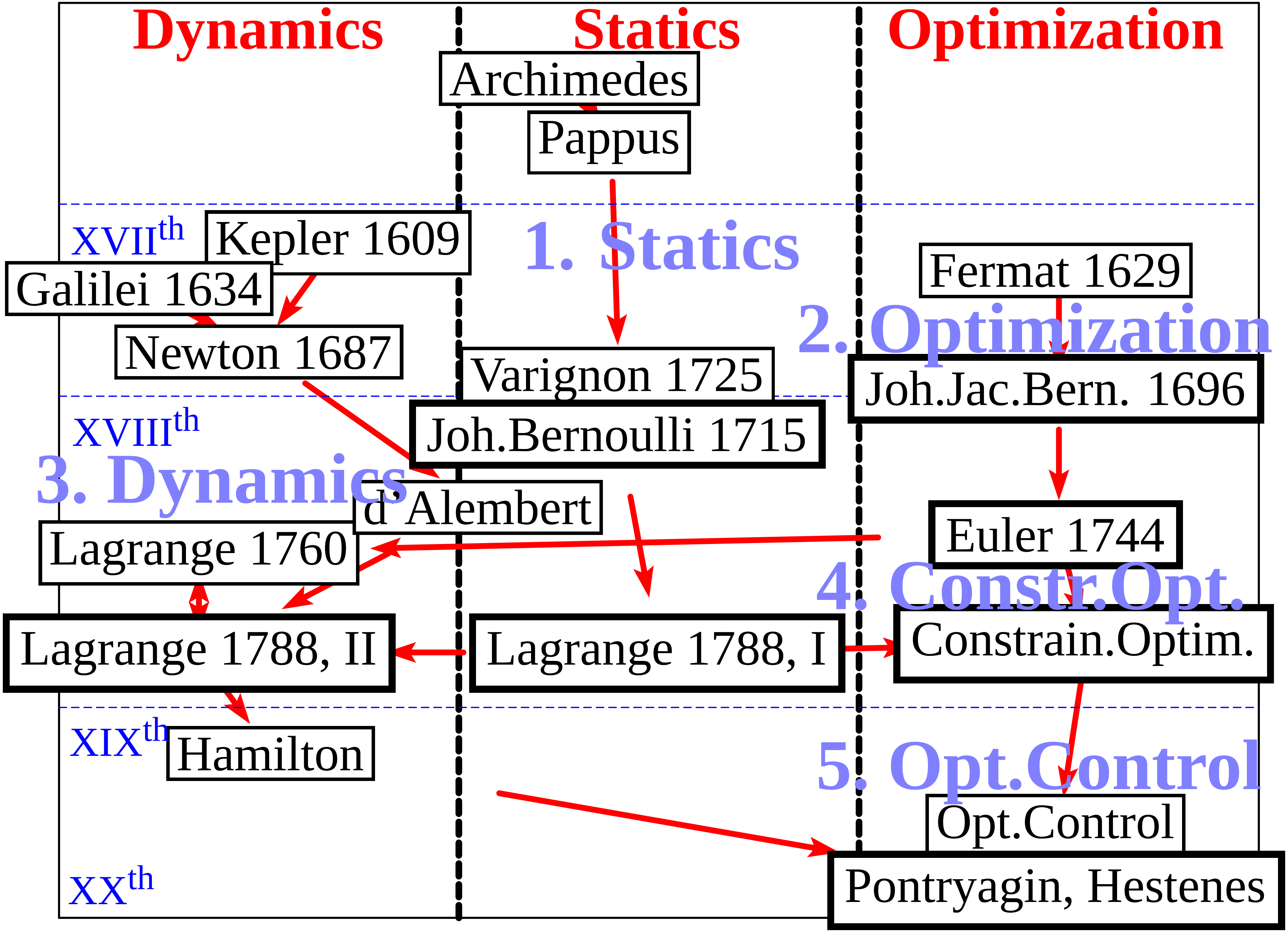
G. Wanner, Salle 17, Sept 17, 2015

(part I of trilogy on Constrained Optimization with M. Gander and F. Kwok)

Torino 1736-1766
Berlin 1766-1787
Paris 1787-1813

“Lagrange, le premier des savants d’Europe,...
il a dans les traits de la dignité ...
il aparaît un peu grêlé et pâle ;
sa voix es très faible, à moins qu’il ne s’échauffe ;
il a l’accent italien très marqué, il prononce les s comme des z
(l’élève Fourier, cité d’après A. Dahan Dalmédico 1992)

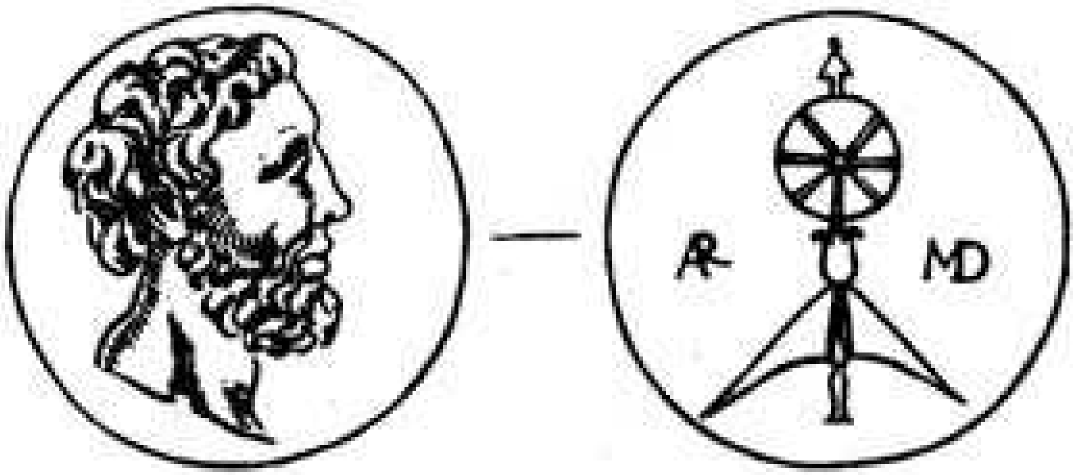
Overview.


Dynamics
Statics
Optimization
Archimedes
Pappus
XVII th
Kepler 1609
Galilei 1634
Newton 1687
1. Statics
Fermat 1629
2. Optimization
Varignon 1725
Joh.Jac.Bern. 1696
XVIII th
Joh.Bernoulli 1715
3. Dynamics
d'Alembert
Euler 1744
Lagrange 1760
4. Constr.Opt.
Lagrange 1788, II
Lagrange 1788, I
Constrain.Optim.
XIX th
Hamilton
5. Opt.Control
Opt.Control
XX th
Pontryagin, Hestenes

1. Start with Archimedes (-287 – -212)

$$\begin{array}{r} 2014 \\ --287 \\ -1 \\ \hline =\mathbf{2300} \end{array}$$

The oldest medal showing Archimedes ...



(Paruta, La Sicilia descritta con medaglie, 1612)

... and the latest

(Evi Hairer's reproduction of Martin's Fields Medal)

"Sed illum (Archimedem) plures laudant quam legant; admirantur plures quam intelligant"
[more praise him that read him; and more admire him than understand him]

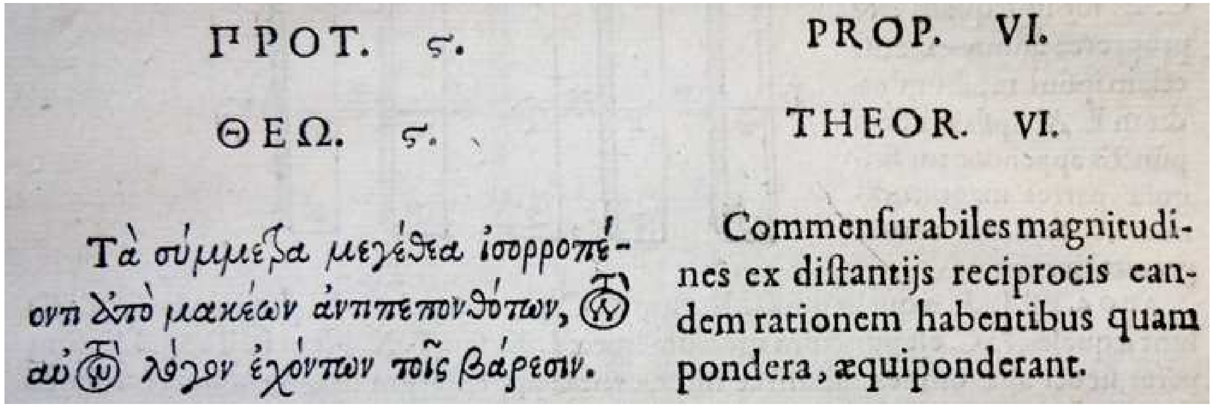
(A. Taquet, Antwerpen 1672; from Ver Eecke, 1923)

Equilibrium of planes.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟ-
ΠΙΩΝ, Η ΚΕΝΤΡΑΒΑΡΩΝ
ΕΠΙΠΕΔΩΝ,

(Opera omnia, printed 1615 (Paris, ed. David Rivault, BGE Ka459)



ΠΡΟΤ. ϛ.

ΘΕΩ. ϛ.

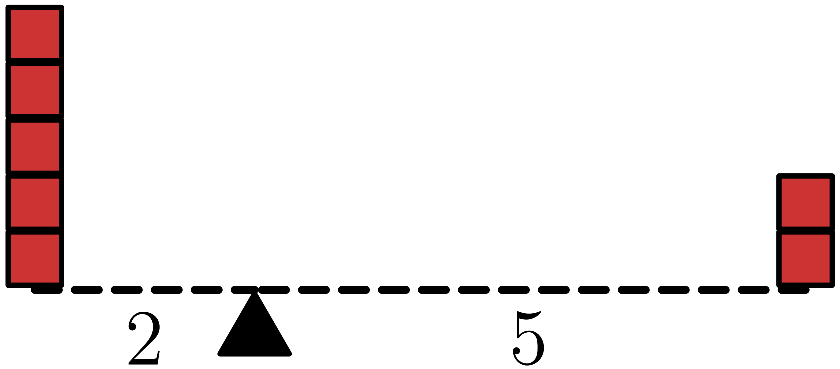
Τὰ σύμμετρα μεγέθεα ἰσορροπέοντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότων, τῶν αὐτῶν λόγον ἐχόντων τοῖς βάρεσιν.

PROP. VI.

THEOR. VI.

Commenſurabiles magnitudines ex diſtantijs reciprocis eandem rationem habentibus quam pondera, æquiponderant.

(Opera omnia, printed 1615 (Paris, ed. David Rivault, BGE Ka459)



Archimedes' original proof:

ἔστω σύμμετρα μεγέθεα τὰ Α, Β, ὧν κέντρα τὰ Α, Β, καὶ μᾶκος ἔστω τι τὸ ΕΔ, καὶ ἔστω, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ μᾶκος ποτὶ τὸ ΓΕ μᾶκος· δεικτέον, ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν Α, Β συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Γ.

ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ ποτὶ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ Α τῷ Β σύμμετρον, καὶ τὸ ΓΔ ἄρα τῷ ΓΕ σύμμετρον, τουτέστιν εὐθεῖα τᾷ εὐθείᾳ· ὥστε τῶν ΕΓ, ΓΔ ἐστι κοινὸν μέτρον. ἔστω δὴ τὸ Ν, καὶ κείσθω τᾷ μὲν ΕΓ ἴσα ἑκατέρα τᾶν ΔΗ, ΔΚ, τᾷ δὲ ΔΓ ἴσα ἁ ΕΛ. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἁ ΔΗ τᾷ ΓΕ, ἴσα καὶ ἁ ΔΓ τᾷ ΕΗ· ὥστε καὶ ἁ ΛΕ ἴσα τᾷ ΕΗ. διπλασία ἄρα ἁ μὲν ΛΗ τᾶς ΔΓ, ἁ δὲ ΗΚ τᾶς ΓΕ· ὥστε τὸ Ν καὶ ἑκατέραν τᾶν ΛΗ, ΗΚ μετρεῖ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ ἡμίσεα αὐτᾶν. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως ἁ ΔΓ ποτὶ ΓΕ, ὡς δὲ ἁ ΔΓ ποτὶ ΓΕ, οὕτως ἁ ΛΗ ποτὶ ΗΚ· διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως ἁ ΛΗ ποτὶ ΗΚ. ὁσαπλασίων δέ ἐστιν ἁ ΛΗ τᾶς Ν, τοσαυταπλασίων ἔστω καὶ τὸ Α τοῦ Ζ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἁ ΛΗ ποτὶ Ν, οὕτως τὸ Α ποτὶ Ζ. ἔστι δὲ καί, ὡς ἁ ΚΗ ποτὶ ΛΗ, οὕτως τὸ Β ποτὶ Α· δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἁ ΚΗ ποτὶ Ν, οὕτως τὸ Β ποτὶ Ζ· ἰσάκις ἄρα πολλαπλασίων ἐστὶν ἁ ΚΗ τᾶς Ν καὶ τὸ Β τοῦ Ζ. ἐδείχθη δὲ τοῦ Ζ καὶ τὸ Α πολλαπλάσιον ἐόν· ὥστε τὸ Ζ τῶν Α, Β κοινόν ἐστι μέτρον. διαιρεθείσας οὖν τᾶς μὲν ΛΗ εἰς τὰς τᾷ Ν ἴσας, τοῦ δὲ Α εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ἐν τᾷ ΛΗ τμάματα ἰσομεγέθεα τῷ Ν ἴσα ἐσσεῖται τῷ πλήθει τοῖς ἐν τῷ Α τμαμάτεσσιν ἴσοις ἐοῦσιν τῷ Ζ. ὥστε, ἂν ἐφ' ἕκαστον τῶν τμαμάτων τῶν ἐν τᾷ ΛΗ ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ Ζ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐντὶ τῷ Α, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ Ε· ἄρτιά τε γάρ ἐστι τὰ πάντα τῷ πλήθει, καὶ τὰ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Ε ἴσα τῷ πλήθει διὰ τὸ ἴσαν εἶμεν τὰν ΛΕ τᾷ ΗΕ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι κἄν, εἴ κα ἐφ' ἕκαστον τῶν ἐν τᾷ ΚΗ τμαμάτων ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ Ζ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ τοῦ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐσσεῖται τῷ Β, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται τὸ Δ· ἐσσεῖται οὖν τὸ μὲν Α ἐπικείμενον κατὰ τὸ Ε, τὸ δὲ Β κατὰ τὸ Δ. ἐσσεῖται δὴ μεγέθεα ἴσα ἀλλάλοις ἐπ' εὐθείας κείμενα, ὧν τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἴσα ἀπ' ἀλλάλων διέστακεν, [συγκείμενα] ἄρτια τῷ πλήθει· δῆλον οὖν, ὅτι τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἁ διχοτομία τᾶς εὐθείας τᾶς ἐχούσας τὰ κέντρα τῶν μέσων μεγεθέων. ἐπεὶ δ' ἴσαι ἐντὶ ἁ μὲν ΛΕ τᾷ ΓΔ, ἁ δὲ ΕΓ τᾷ ΔΚ, καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΛΓ ἴσα τᾷ ΓΚ· ὥστε τοῦ ἐκ πάντων μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ σαμεῖον. τοῦ μὲν ἄρα Α κειμένου κατὰ τὸ Ε, τοῦ δὲ Β κατὰ τὸ Δ, ἰσορροπησοῦντι κατὰ τὸ Γ.

Archimedes' original proof:

ἔστω σύμμετρα μεγέθεα τὰ Α, Β, ὧν κέντρα τὰ Α, Β, καὶ μᾶκος ἔστω τι τὸ ΕΔ, καὶ ἔστω, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ μᾶκος ποτὶ τὸ ΓΕ μᾶκος· δεικτέον, ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν Α, Β συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Γ.

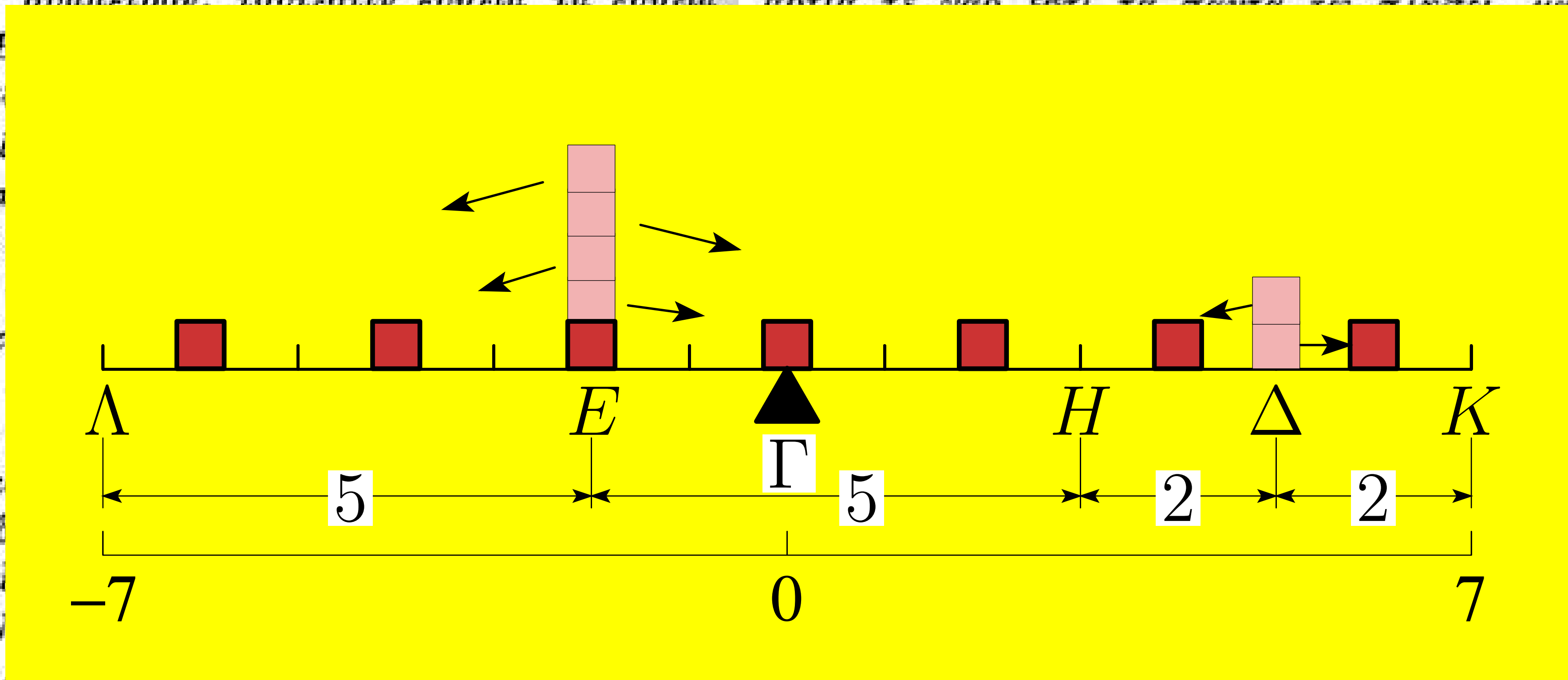
ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ ποτὶ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ Α τῷ Β σύμμετρον, καὶ τὸ ΓΔ ἄρα τῷ ΓΕ σύμμετρον, τουτέστιν εὐθεῖα τᾷ εὐθείᾳ· ὥστε τῶν ΕΓ, ΓΔ ἐστι κοινὸν μέτρον. ἔστω δὴ τὸ Ν, καὶ κείσθω τᾷ μὲν ΕΓ ἴσα ἑκατέρα τᾶν ΔΗ, ΔΚ,
τᾷ δὲ ΔΓ ἴσα ἁ ΕΛ
καὶ ἁ ΔΓ τᾷ ΕΗ· ἐ
πλασία ἄρα ἁ μὲν Λ
ὥστε τὸ Ν καὶ ἑκατέ
δήπερ καὶ τὰ ἡμίσεα
ποτὶ τὸ Β, οὕτως ἁ
ΓΕ, οὕτως ἁ ΛΗ ποτὶ ΗΚ· διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως ἁ ΛΗ ποτὶ ΗΚ. ὁσαπλασίων δέ ἐστιν ἁ ΛΗ τᾶς Ν, τοσαυταπλασίων ἔστω καὶ τὸ Α τοῦ Ζ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἁ ΛΗ ποτὶ Ν, οὕτως τὸ Α ποτὶ Ζ. ἔστι δὲ καί, ὡς ἁ ΚΗ ποτὶ ΛΗ, οὕτως τὸ Β ποτὶ Α· δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἁ ΚΗ ποτὶ Ν, οὕτως τὸ Β ποτὶ Ζ· ἰσάκις ἄρα πολλαπλασίων ἐστὶν ἁ ΚΗ τᾶς Ν καὶ τὸ Β τοῦ Ζ. ἐδείχθη δὲ τοῦ Ζ καὶ τὸ Α πολλαπλάσιον ἐόν· ὥστε τὸ Ζ τῶν Α, Β κοινόν ἐστι μέτρον. διαιρεθείσας οὖν τᾶς μὲν ΛΗ εἰς τὰς τᾷ Ν ἴσας, τοῦ δὲ Α εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ἐν τᾷ ΛΗ τμάματα ἰσομεγέθεα τᾷ Ν ἴσα ἐσσεῖται τῷ πλήθει τοῖς ἐν τῷ Α τμαμάτεσσιν ἴσοις ἐοῦσιν τῷ Ζ. ὥστε, ἂν ἐφ' ἕκαστον τῶν τμαμάτων τῶν ἐν τᾷ ΛΗ ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ Ζ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐντὶ τῷ Α, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ Ε· ἄρτιά τε γάρ ἐστι τὰ πάντα τῷ πλήθει, καὶ τὰ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Ε ἴσα τῷ πλήθει διὰ τὸ ἴσαν εἶμεν τὰν ΛΕ τᾷ ΗΕ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι κἄν, εἴ κα
ων ἐπιτεθῇ μέγε-
ἔχον ἐπὶ τοῦ μέ-
θεα ἴσα ἐσσεῖται
νου κέντρον τοῦ
ν τὸ μὲν Α ἐπι-
ὰ τὸ Δ. ἐσσεῖται δὴ μεγέθεα ἴσα ἀλλάλοις ἐπ' εὐθείας κείμενα, ὧν τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἴσα ἀπ' ἀλλάλων διέστακεν, [συγκείμενα] ἄρτια τῷ πλήθει· δῆλον οὖν, ὅτι τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἁ διχοτομία τᾶς εὐθείας τᾶς ἐχούσας τὰ κέντρα τῶν μέσων μεγεθέων. ἐπεὶ δ' ἴσαι ἐντὶ ἁ μὲν ΛΕ τᾷ ΓΔ, ἁ δὲ ΕΓ τᾷ ΔΚ, καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΛΓ ἴσα τᾷ ΓΚ· ὥστε τοῦ ἐκ πάντων μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ σαμεῖον. τοῦ μὲν ἄρα Α κειμένου κατὰ τὸ Ε, τοῦ δὲ Β κατὰ τὸ Δ, ἰσορροπησοῦντι κατὰ τὸ Γ.

Intelligant .. !!! ????

Archimedes' original proof:

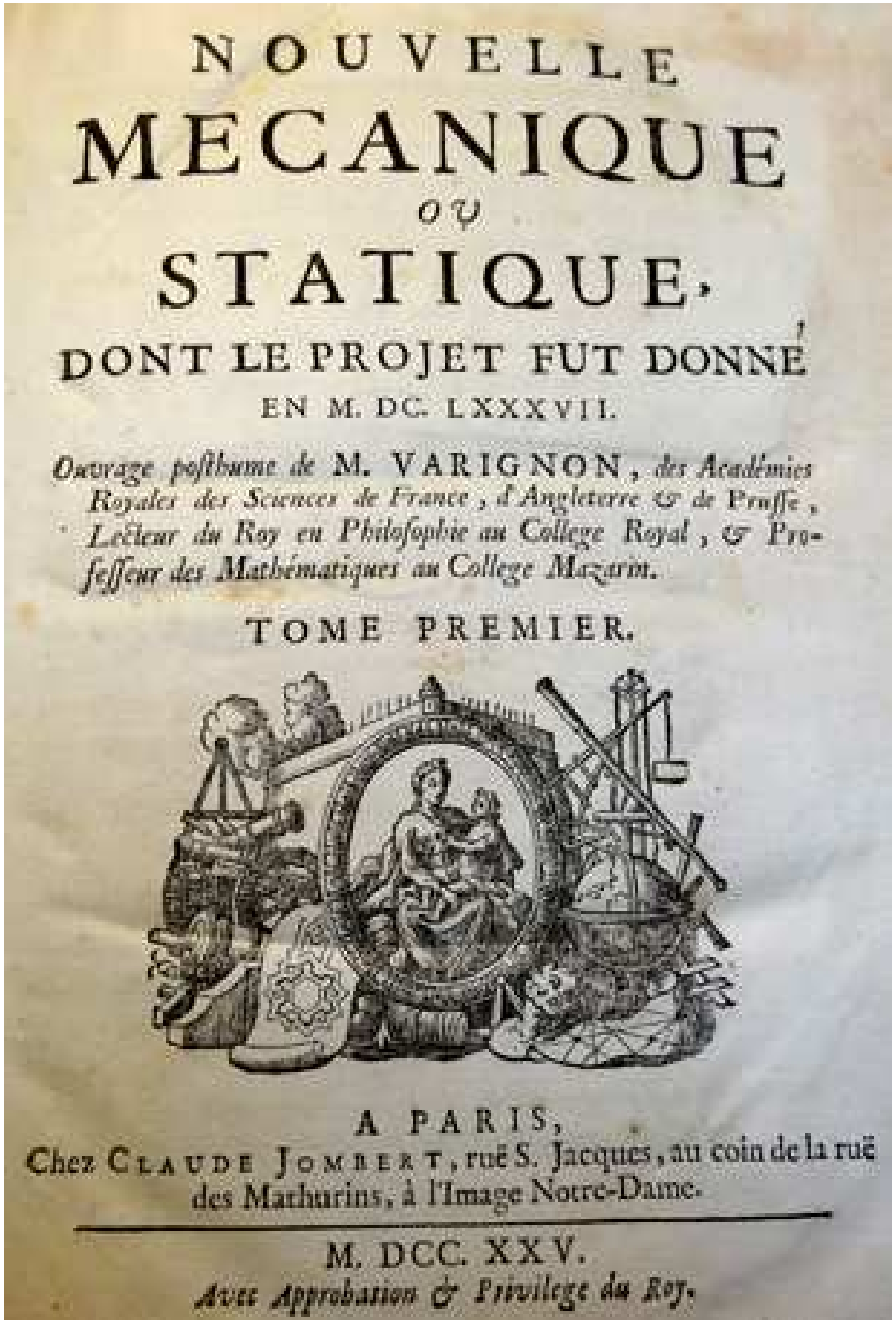
ἔστω σύμμετρα μεγέθεα τὰ Α, Β, ὧν κέντρα τὰ Α, Β, καὶ μᾶκος ἔστω τι τὸ ΕΔ, καὶ ἔστω, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ μᾶκος ποτὶ τὸ ΓΕ μᾶκος· δεικτέον, ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν Α, Β συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Γ.

ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ ποτὶ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ Α τῷ Β σύμμετρον, καὶ τὸ ΓΔ ἄρα τῷ ΓΕ σύμμετρον, τουτέστιν εὐθεῖα τᾷ εὐθείᾳ·
ὥστε τῶν
Ν, καὶ κείσ
τᾷ δὲ ΔΓ
καὶ ἁ ΔΓ τ
πλασία ἄρα
ὥστε τὸ Ν
δήπερ καὶ τ
ποτὶ τὸ Β,
ΓΕ, οὕτως
ἑκατέρας· κ
ποτὶ ΗΚ. δ
ταπλασίων
ΔΗ ποτὶ Ν
ΚΗ ποτὶ
ἐστίν, ὡς ἁ ΚΗ ποτὶ Ν, οὕτως τὸ Β ποτὶ Ζ· ἰσάκις ἄρα πολλαπλασίων ἐστὶν ἁ ΚΗ τᾶς Ν καὶ τὸ Β τοῦ Ζ. ἐδείχθη δὲ τοῦ Ζ καὶ τὸ Α πολλαπλάσιον ἐόν· ὥστε τὸ Ζ τῶν Α, Β κοινόν ἐστι μέτρον. διαιρεθείσας οὖν τᾶς μὲν ΔΗ εἰς τὰς τᾷ Ν ἴσας, τοῦ δὲ Α



εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ἐν τᾷ ΔΗ τμάματα ἰσομεγέθεα τᾷ Ν ἴσα ἐσσεῖται τῷ πλήθει τοῖς ἐν τῷ Α τμαμάτεσσιν ἴσοις ἐοῦσιν τῷ Ζ. ὥστε, ἂν ἐφ' ἕκαστον τῶν τμαμάτων τῶν ἐν τᾷ ΔΗ ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ Ζ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐντὶ τῷ Α, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ Ε· ἄρτιά τε γάρ ἐστι τὰ πάντα τῷ πλήθει, καὶ τὰ ἐφ'
μεν τὰν
ν, εἴ κα
θῇ μέγε-
τοῦ μέ-
ἐσσεῖται
τρον τοῦ
Α ἐπι-
ἐσσεῖται
κ, ὧν τὰ
ν, [συγ-
τοῦ ἐκ
τοῦ βά-
ὰ κέντρα
τῶν μέσων μεγεθέων. ἐπεὶ δ' ἴσαι ἐντὶ ἁ μὲν ΔΕ τᾷ ΓΔ, ἁ δὲ ΕΓ τᾷ ΔΚ, καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΔΓ ἴσα τᾷ ΓΚ· ὥστε τοῦ ἐκ πάντων μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ σαμεῖον. τοῦ μὲν ἄρα Α κειμένου κατὰ τὸ Ε, τοῦ δὲ Β κατὰ τὸ Δ, ἰσορροπησοῦντι κατὰ τὸ Γ.

P. Varignon (work started 1687, publ. posth. 1725):



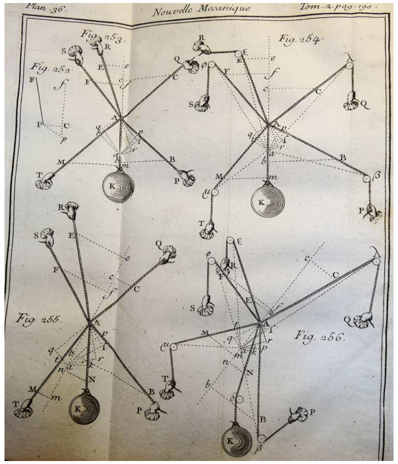
NOUVELLE
MECANIQUE
OU
STATIQUE.
DONT LE PROJET FUT DONNÉ
EN M. DC. LXXXVII.

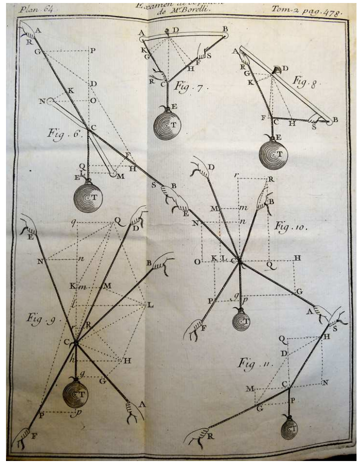
Ouvrage posthume de M. VARIGNON, des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Prusse, Lecteur du Roy en Philosophie au College Royal, & Professeur des Mathématiques au College Mazarin.

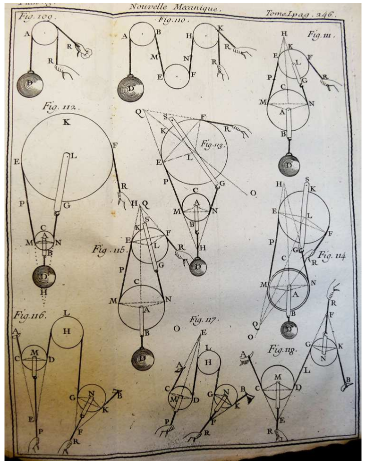
TOME PREMIER.

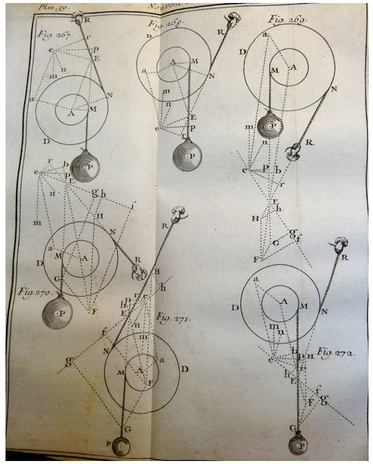
A PARIS,
Chez CLAUDE JOMBERT, ruë S. Jacques, au coin de la ruë des Mathurins, à l'Image Notre-Dame.

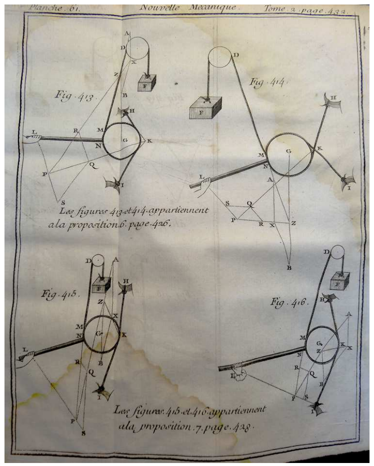
M. DCC. XXV.
Avec Approbation & Privilege du Roy.

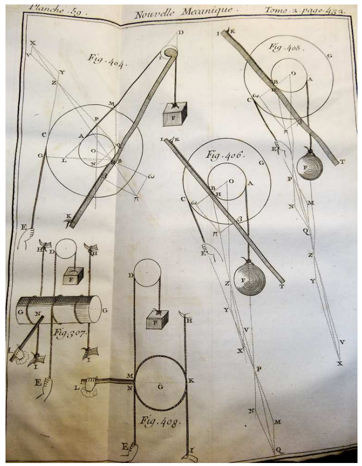


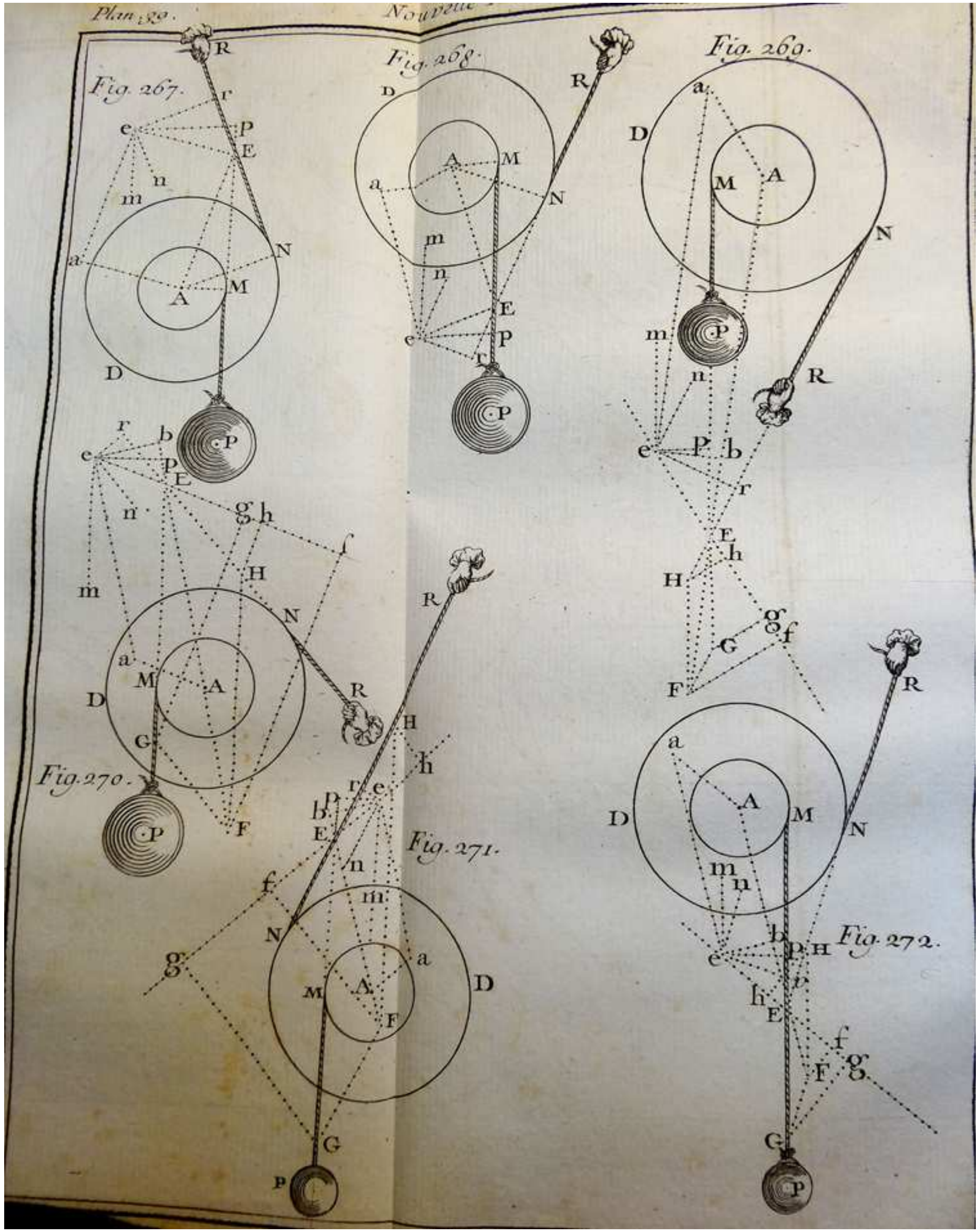




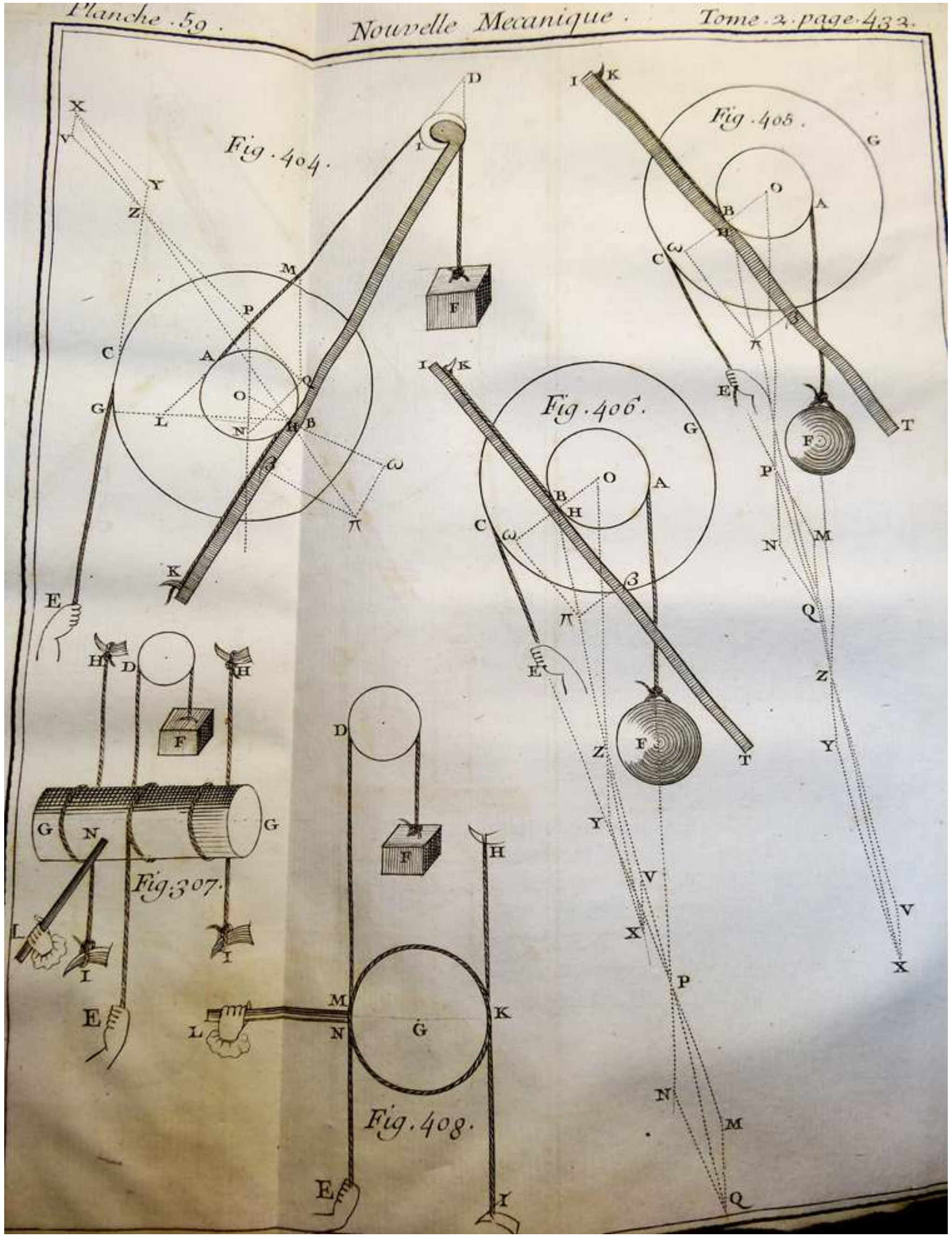




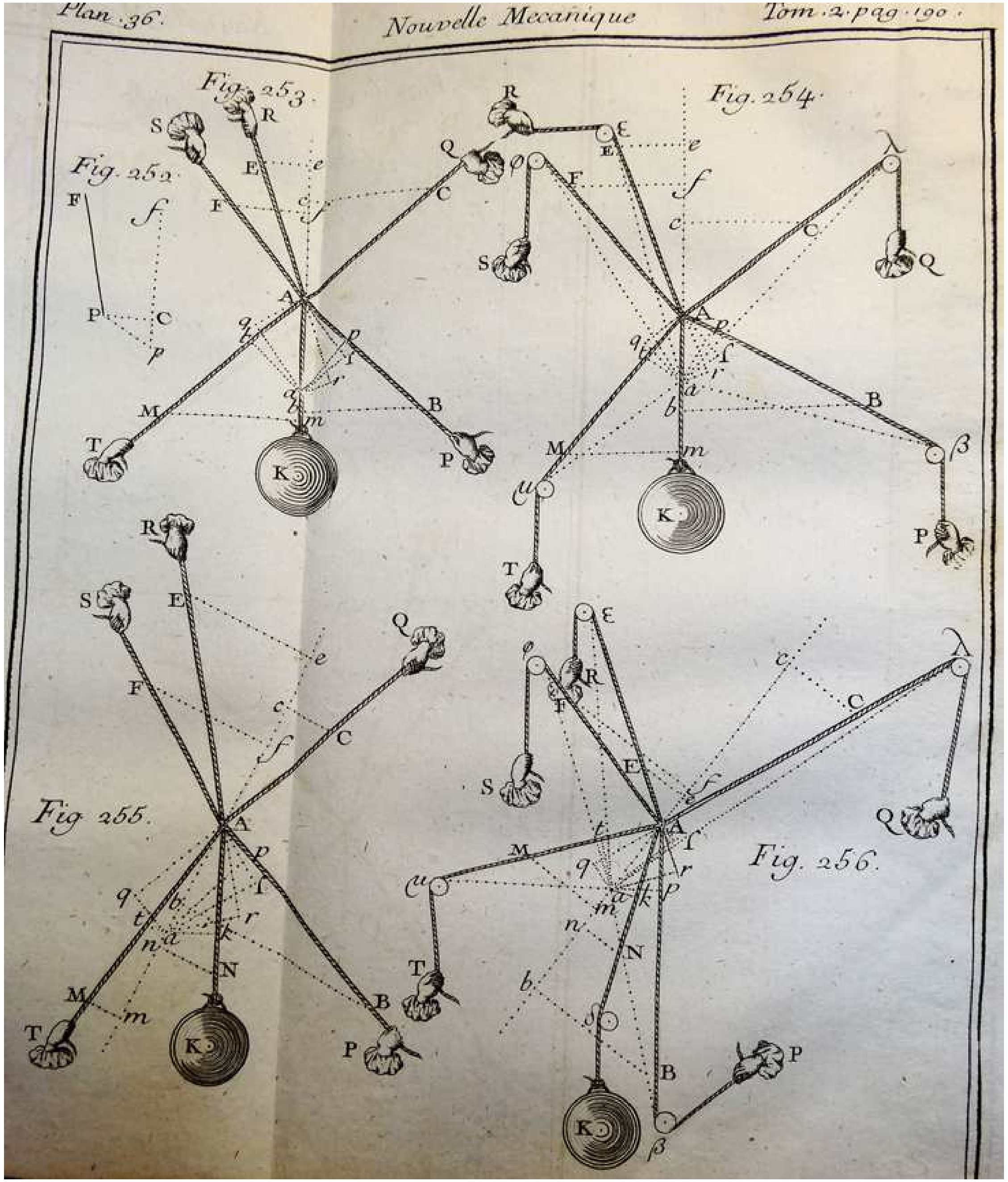




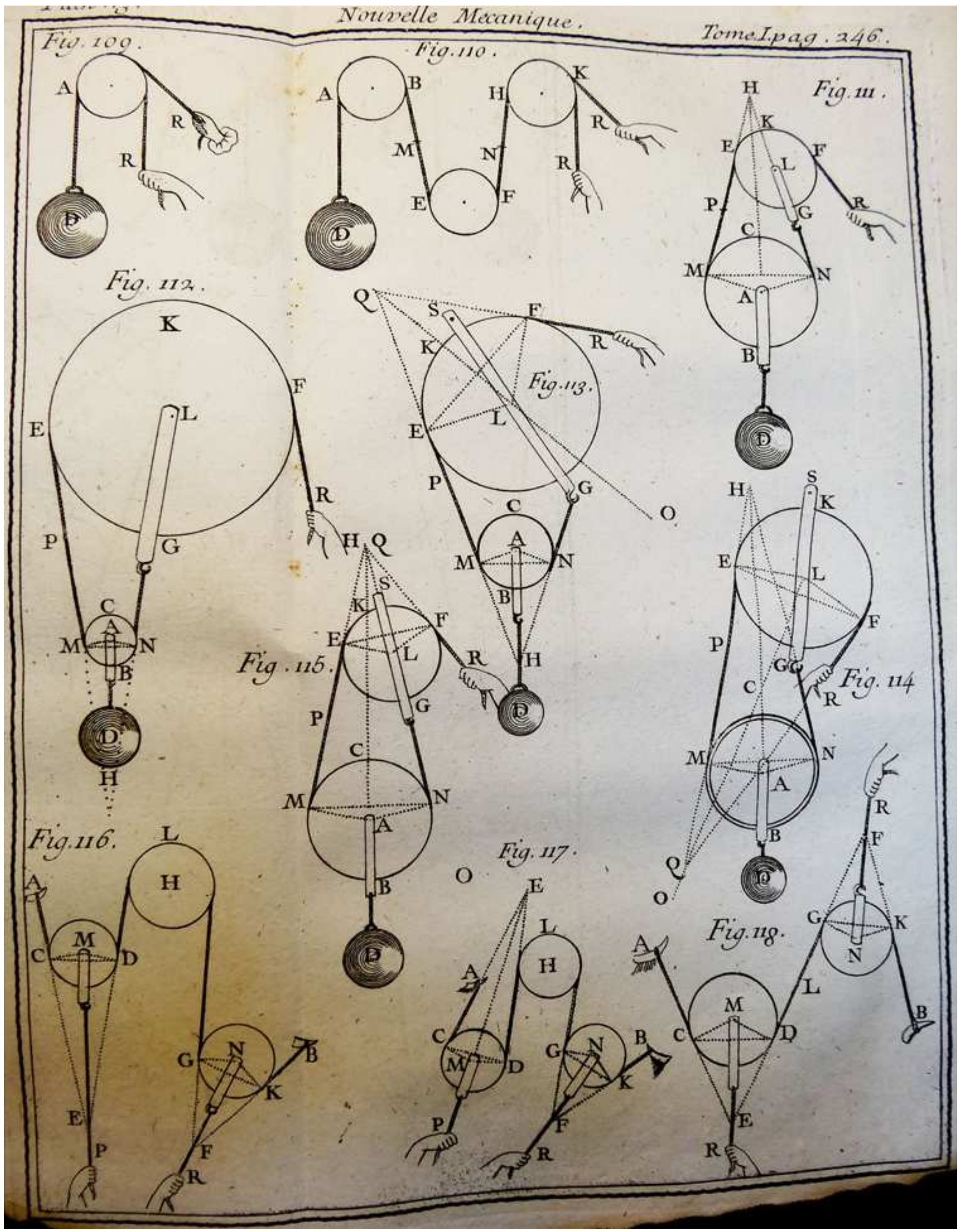
Varignon 1725, plate 39



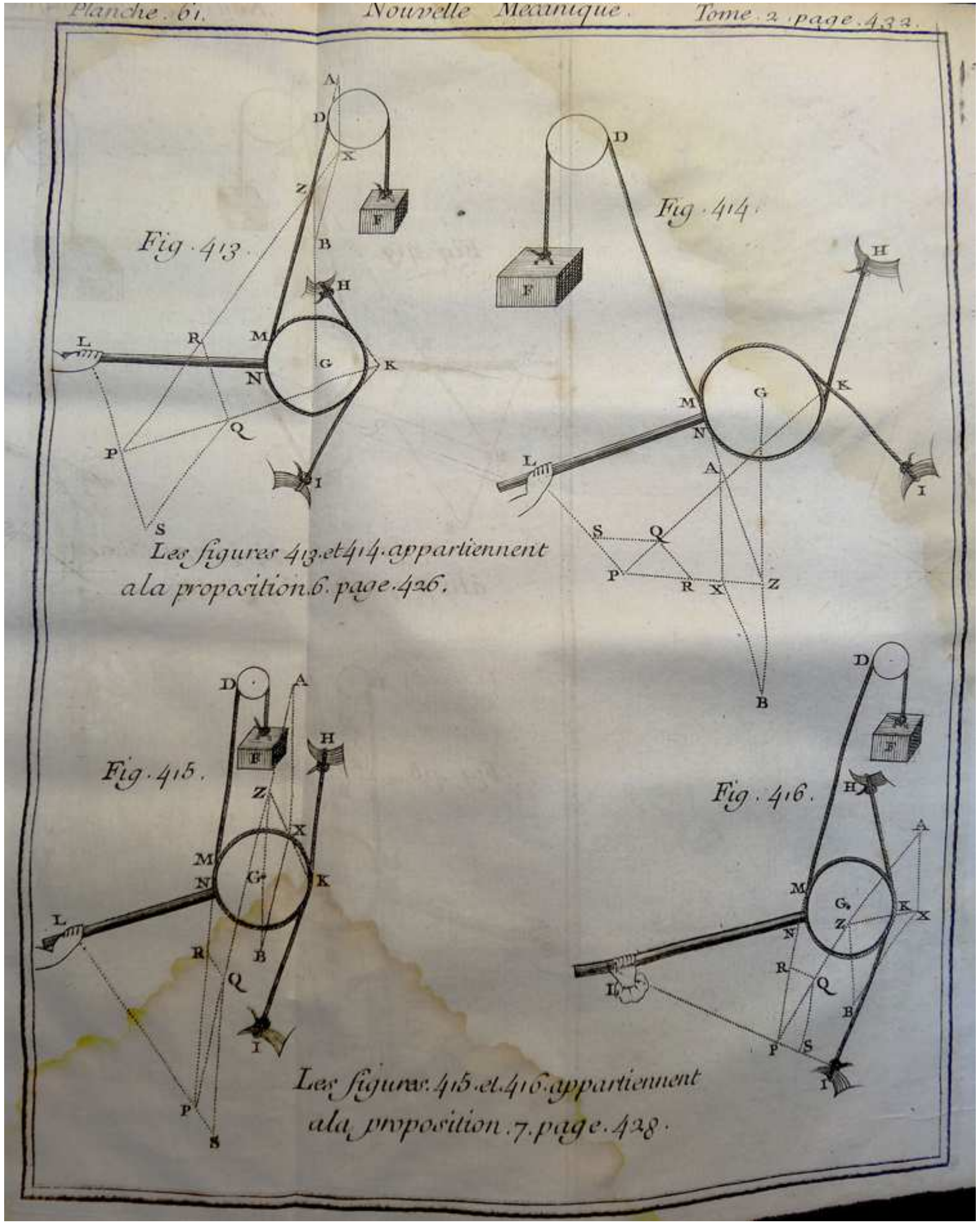
Varignon 1725, plate 59



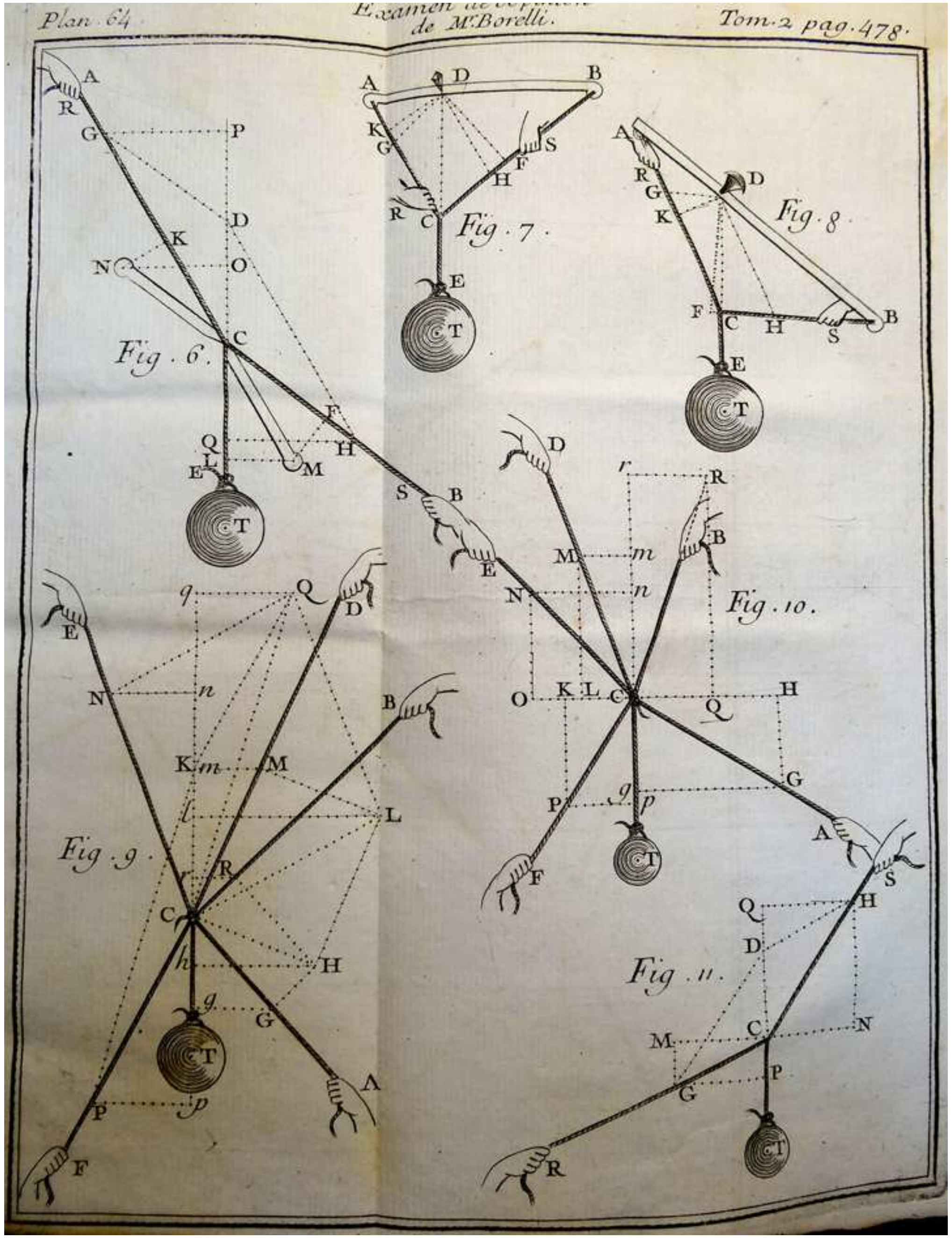
Varignon 1725, plate 36



Varignon 1725, plate 13

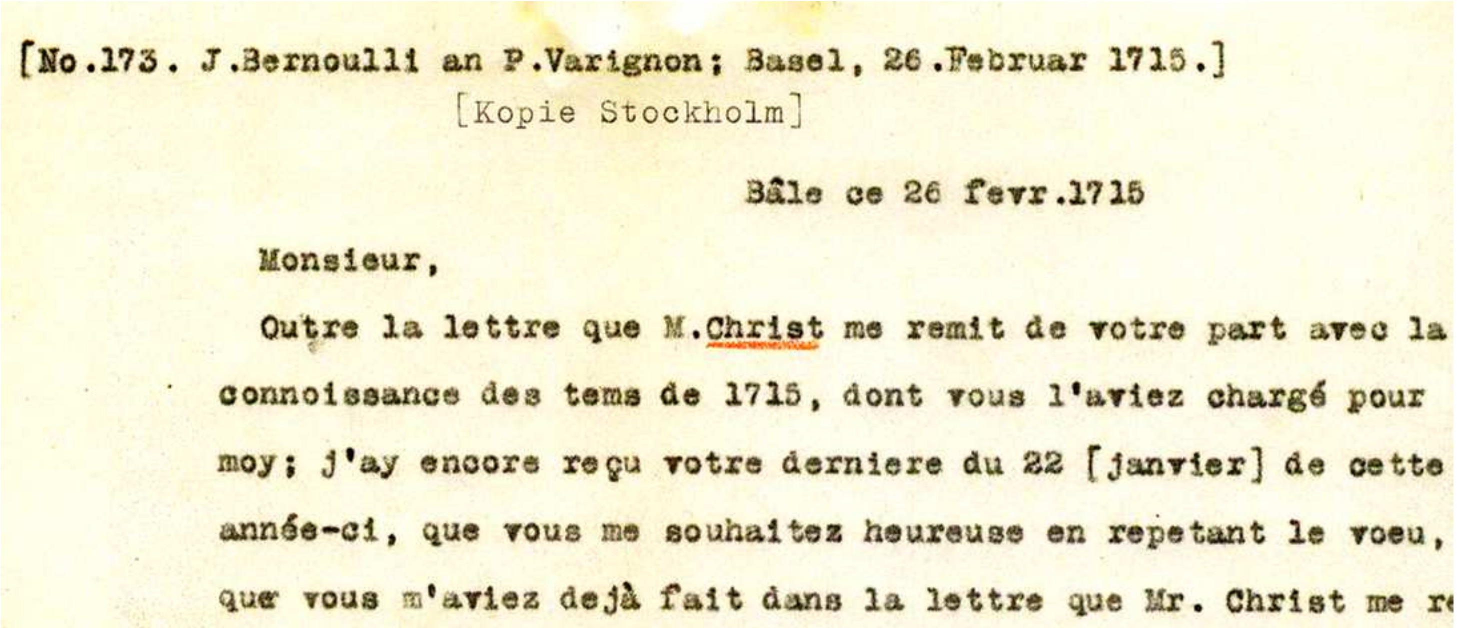


Varignon 1725, plate 61



Varignon 1725, plate 64

Joh. Bernoulli's letter (Febr. 26, 1715) (300 years!)

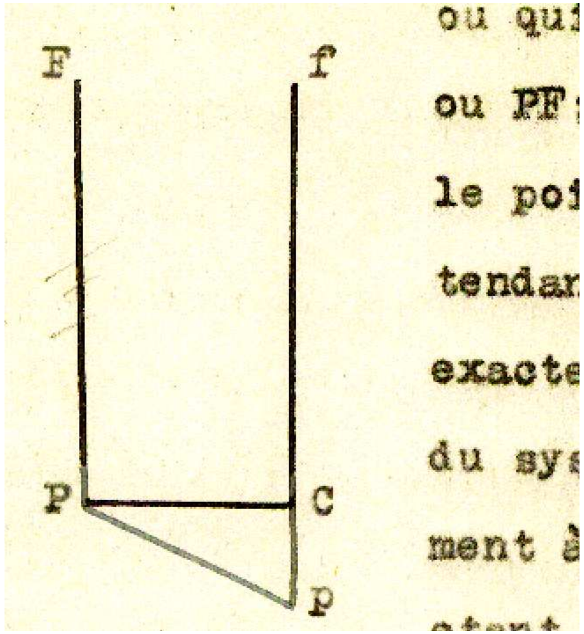


[No.173. J.Bernoulli an P.Varignon; Basel, 26.Februar 1715.]
[Kopie Stockholm]

Bâle ce 26 fevr.1715

Monsieur,

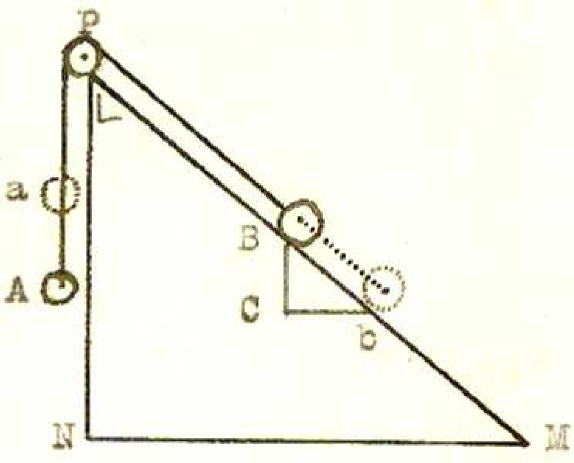
Outre la lettre que M.Christ me remit de votre part avec la connoissance des tems de 1715, dont vous l'aviez chargé pour moy; j'ay encore reçu votre derniere du 22 [janvier] de cette année-ci, que vous me souhaitez heureuse en repetant le voeu, que vous m'aviez dejà fait dans la lettre que Mr. Christ me re



"Votre projet ... fourmille d'un grand nombre d'exemples, dont quelques uns ... ... paroissent assez compliqués; mais je vous deffie de m'en proposer un à votre choix, que je ne resolve sur le champ et comme en jouant par ma dite regle ..."

Idea: perform small displacement by “vitesse virtuelle” ($\times dt$):

II. Il s'agit de sçavoir la raison des deux poids A et B at-

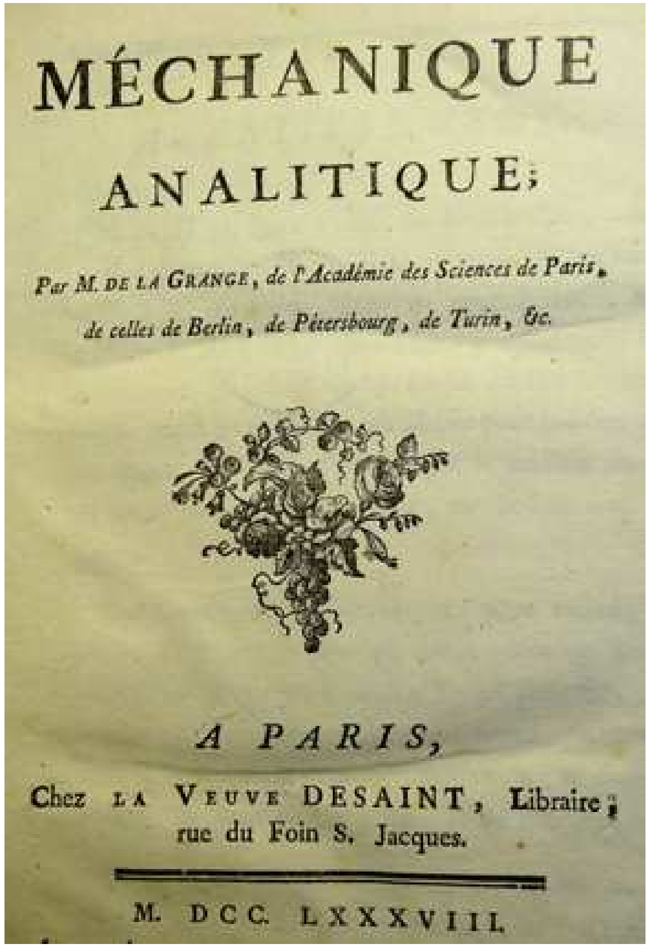


tachés aux extremités de la corde APB qui passe par la poulie P et dont la partie PB est parallele au plan incliné LM sur lequel le poid B est appuyé et cependant en equi- libre avec l'autre poids A qui pen librement. Concevons que A monte e

donc selon mon principe, que A x Aa = B x BC

(Joh. Bernuolli’s letter, page 6; courtesy M. Mattmueller, Basel)

Starting point for Lagrange’s *Mécanique analytique*:



MÉCHANIQUE

ANALITIQUE;

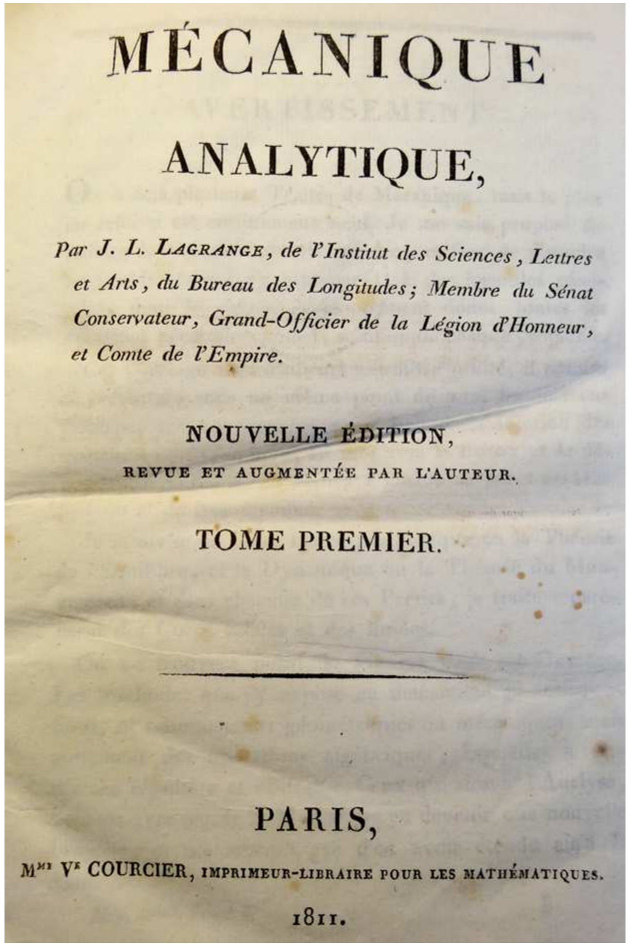
Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie des Sciences de Paris, de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.

A PARIS,

Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII.

(First ed. 1788)



MÉCANIQUE

ANALYTIQUE,

Par J. L. LAGRANGE, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, du Bureau des Longitudes; Membre du Sénat Conservateur, Grand-Officier de la Légion d'Honneur, et Comte de l'Empire.

NOUVELLE ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

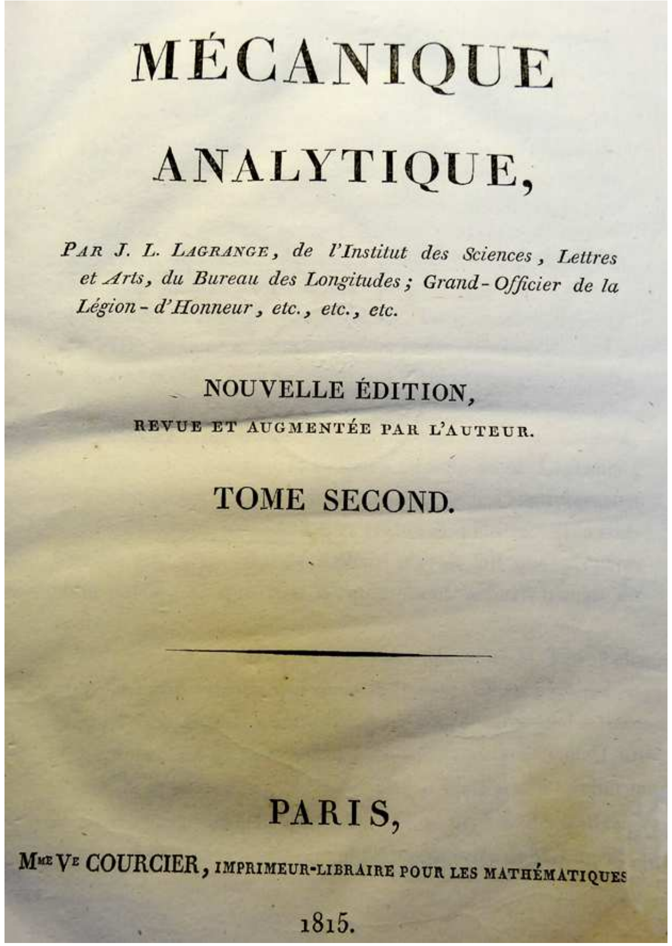
TOME PREMIER.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES.

1811.

(Second ed. 1811)



MÉCANIQUE

ANALYTIQUE,

PAR J. L. LAGRANGE, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, du Bureau des Longitudes; Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, etc., etc., etc.

NOUVELLE ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

TOME SECOND.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES

1815.

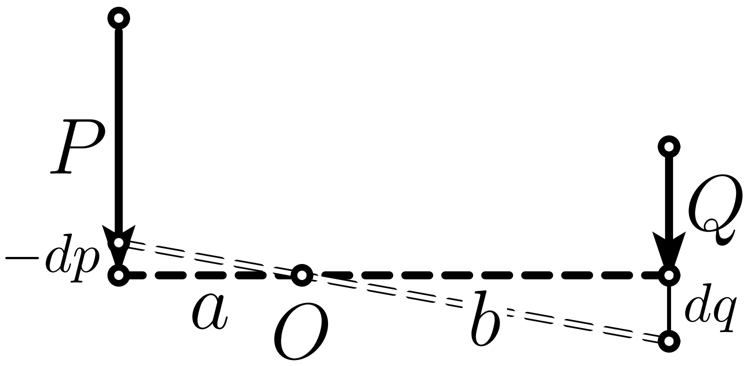
(Second ed. vol II, 1815)

First Part.	Statics.
Second Part.	Dynamcs.

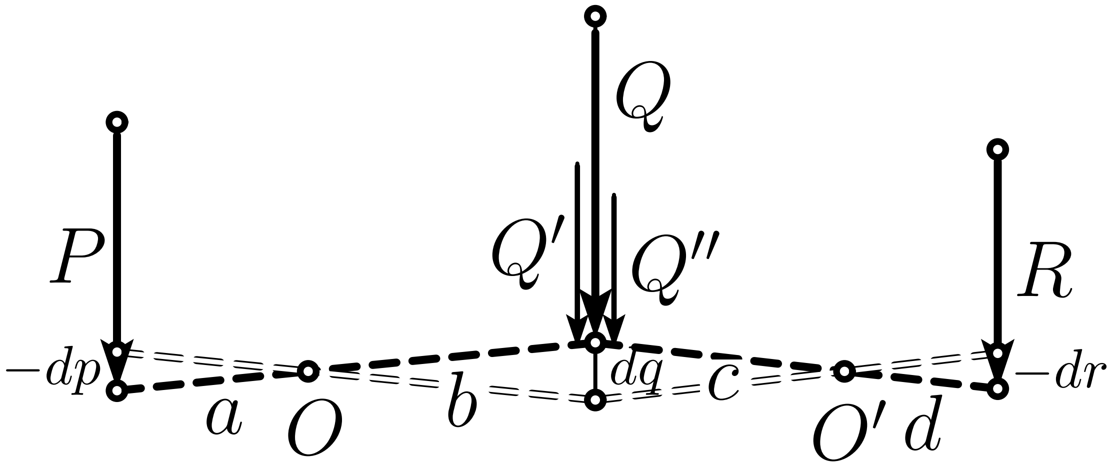
“Parmi tant de chefs-d’œuvre que l’on doit à son génie, sa *Mécanique* est sans contredit le plus grand, le plus remarquable et le plus important” (Delambre 1813).

Bernoulli's "regle" in Lagrange 1788: (except the pictures!!)

Archimedes: $P \cdot a = Q \cdot b$



$\longrightarrow$



Bernoulli: $-P \cdot dp = Q \cdot dq$

$$P dp + Q' dq = 0$$

and $Q'' dq + R dr = 0$;

$\Rightarrow \quad P dp + Q dq = 0.$

$\nearrow$

$\Rightarrow \quad P dp + Q dq + R dr = 0$

etc. $\Rightarrow$ **any** machine: **"general formula for equilibruim":**

$$\boxed{P dp + Q dq + R dr + \ldots = 0}$$

General theorem of equilibria:

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c = 0.$$

formule générale de l'équilibre d'un

Bernoulli's rule as published by Lagrange 1788

PROPOSITION GENERALE.

THEOREME XL.

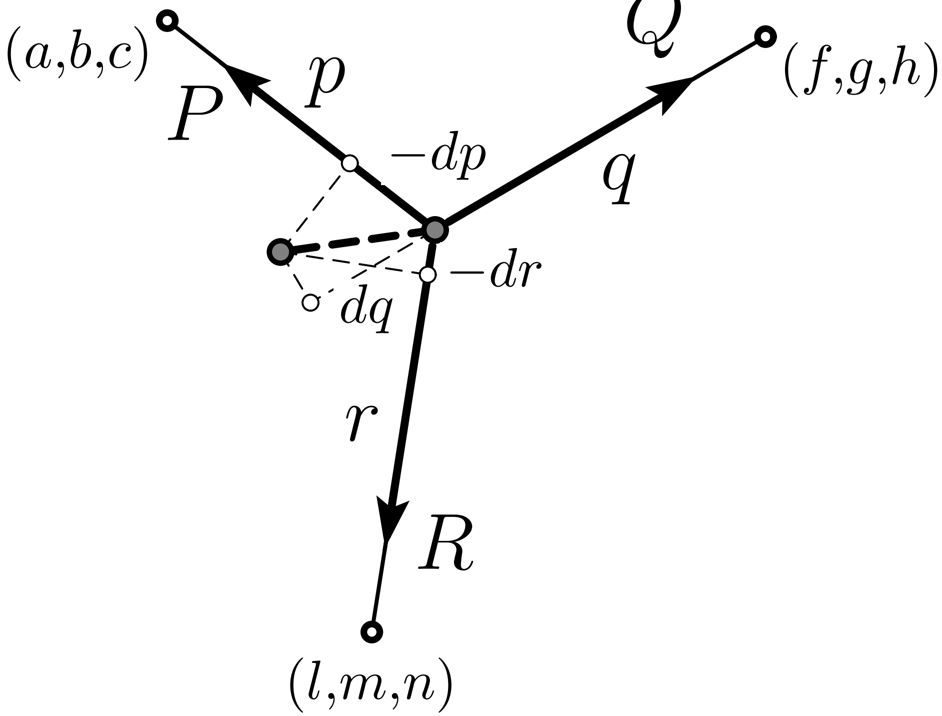
« *En tout équilibre de forces quelconques, en quelque maniere*
» *qu'elles ſoient appliquées, & ſuivant quelques directions*
» *qu'elles agiſſent les unes ſur les autres, ou médiatement, ou*
» *immédiatement, la ſomme des Energies affirmatives ſera*
» *égale à la ſomme des Energies négatives priſes affirmative-*
» *ment.*

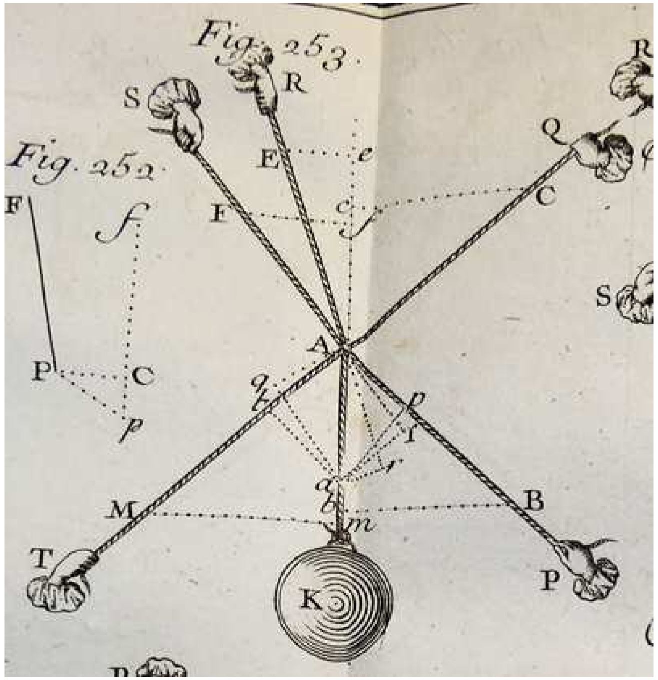
Bernoulli's regle as published by Varignon 1725

bien entendu je forme cette proposition generale en disant qu'en
tout equilibre des forces quelconques en quelque maniere,qu'elle
soyent appliquées et suivant quelques directions, qu'elles
agissent les unes sur les autres ou mediatement ou immediatement
la somme des energies affirmatives sera egale à la somme des
energies negatives prises affirmativement;Cette proposition fou

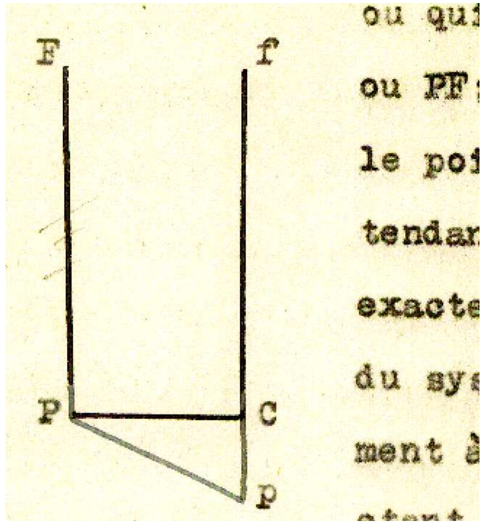
Joh. Bernoulli's original text

First example treated by Lagrange (in sect. V):





same problem in Varignon (Plate 36)



... in Bernoulli

Compute $Pdp + Qdq + Rdr$:

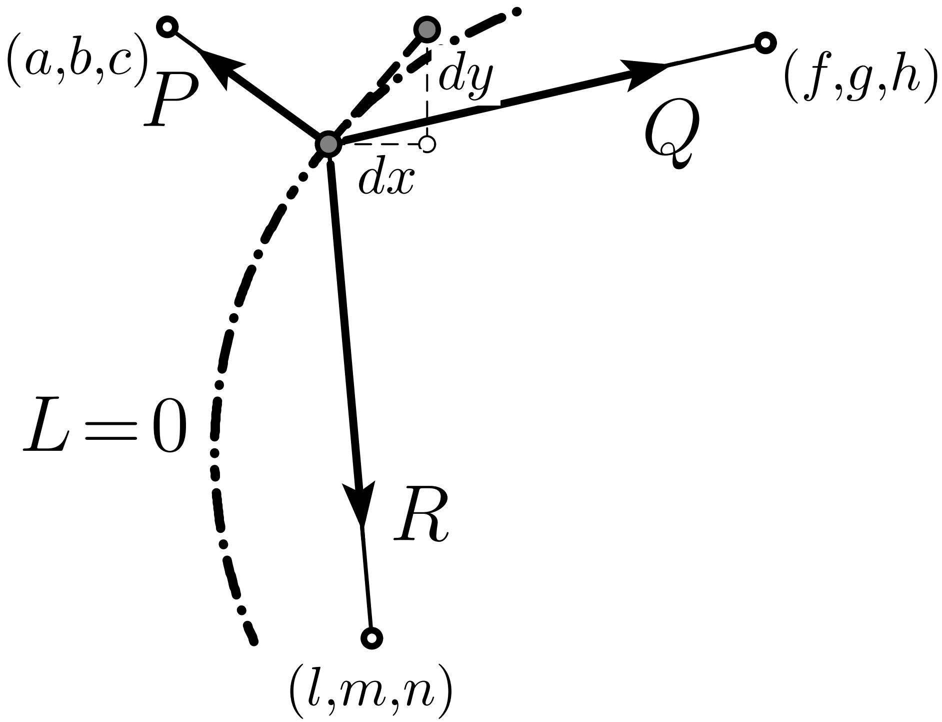
$$p=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\,, \Rightarrow dp=\tfrac{1}{p}\cdot((x-a)dx+(y-b)dy+(z-c)dz)\,,$$

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \qquad X = P\,\frac{x-a}{p} + Q\,\frac{x-f}{q} + R\,\frac{x-l}{r}$$

$$dx,\ dy,\ dz \text{ indep.} \quad \Downarrow \qquad Y = P\,\frac{y-b}{p} + Q\,\frac{y-g}{q} + R\,\frac{y-m}{r}$$

$$X = 0\,,\quad Y = 0\,,\quad Z = 0\,. \qquad Z = P\,\frac{z-c}{p} + Q\,\frac{z-h}{q} + R\,\frac{z-n}{r}$$

Constrained position : (to surface $L=0$) $\Rightarrow$



$$X dx + Y dy + Z dz = 0 \quad \text{(a)}$$

dx, dy, dz not indep. because

$$\frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial y} dy + \frac{\partial L}{\partial z} dz = 0\,. \quad \text{(b)}$$

(a)+(b) is linear system,

$\Rightarrow$ Intermezzo……

Intermezzo: Misc. Taurinensia, vol. I, (1759):

Lagrange's opus 1:

MISCELLANEA

PHILOSOPHICO -- MATHEMATICA

SOCIETATIS PRIVATAE

TAURINENSIS

TOMUS PRIMUS.

AUGUSTÆ TAURINORUM,

EX TYPOGRAPHIA REGIA.

MDCCLIX.

18

RECHERCHES

SUR LA METHODE

DE MAXIMIS, ET MINIMIS

PAR M. LOUIS DE LA GRANGE.

I. LES Géométres ſavent depuis long-tems, que lorſque la premiére différentielle d'une variable quelconque diſparoit ſans que la ſeconde diſparoiſſe en même tems, elle devient toujours un *maximum*, ou un *minimum*; & en particulier elle eſt un *maximum*, ſi ſa différentielle ſeconde eſt négative, & un *minimum*, ſi cette différentielle eſt poſitive. Si la différentielle ſecon-

... plusieures variables ...

Soit poſé $C - \frac{B^2}{A} = a$, $E - \frac{BD}{A} = b$, $F - \frac{D^2}{A} = c$,

("Gaussian" elimination at matrix $\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$)

Lagrange's opus 3: *La Nature et la Propagation du Son:*

$$y^{\mathrm{I}} \sin. \frac{\pi}{2m} + y^{\mathrm{II}} \sin. \frac{2\,\pi}{2\,m} + y^{\mathrm{III}} \sin. \frac{3\,\pi}{2\,m} + \&c. +$$

$$y^{m-1} \sin. (m-1) \frac{\pi}{2m} = S^{\mathrm{I}}$$

$$y^{\mathrm{I}} \sin. \frac{2\,\pi}{2\,m} + y^{\mathrm{II}} \sin. \frac{4\,\pi}{2\,m} + y^{\mathrm{III}} \sin. \frac{6\,\pi}{2\,m} + \&c. +$$

$$y^{m-1} \sin. 2\,(m-1) \frac{\pi}{2m} = S^{\mathrm{II}}$$

$$y^{\mathrm{I}} \sin. \frac{3\,\pi}{2\,m} + y^{\mathrm{II}} \sin. \frac{6\,\pi}{2m} + y^{\mathrm{III}} \sin. \frac{9\,\pi}{2\,m} + \&c. +$$

$$y^{m-1} \sin. 3\,(m-1) \frac{\pi}{2m} = S^{\mathrm{III}}$$

&c.

$$y^{\mathrm{I}} \sin. (m-1) \frac{\pi}{2m} + y^{\mathrm{II}} \sin. 2\,(m-1) \frac{\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{m-1} \sin. (m-1)^2 \frac{\pi}{2m} = S^{m-1}$$

dont le nombre ſera $m - 1$.

Il faudroit à préſent, ſelon les règles ordinaires ſubſti-tuer les valeurs des inconnues y^{I}, y^{II}, y^{III} &c. d'une

(Linear system for discrete trigonometric interpolation)

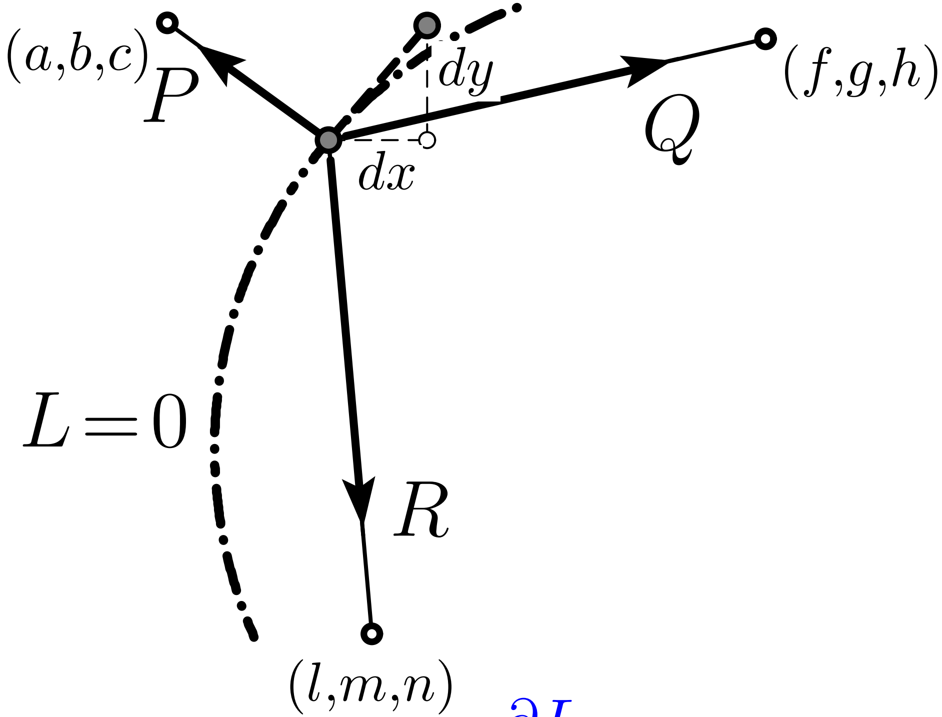
"Il faudroit à présent, selon les règles ordinaires, substituer ..."

" ... tomberait dans des calculs impraticables ..."

" ... il est donc nécessaire de suivre une autre route ..."

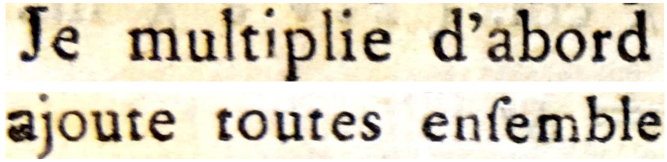
24. Je multiplie d'abord chacune de ces équations par un des coéficiens indéterminés D^{I}, D^{II}, D^{III}, D^{IV} &c., en ſuppoſant que le premier D^{I} ſoit $= 1$; enſuite je les ajoute toutes enſemble, j'ai

Retour: Constrained position : (to surface $L = 0$) $\Rightarrow$



$$X dx + Y dy + Z dz = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial y} dy + \frac{\partial L}{\partial z} dz = 0\,. \qquad \text{(b)}$$


Je multiplie d'abord
ajoute toutes enfemble

("Il n'est pas difficile de prouver par la théorie de **l'élimination des équations linéaires** ...")
(Lagrange 1788)

$$\underbrace{(X + \lambda \frac{\partial L}{\partial x}) dx + (Y + \lambda \frac{\partial L}{\partial y}) dy +}_{=\,0 \text{ for all } dx \text{ and } dy \text{ (indep.)}} \quad \underbrace{(Z + \lambda \frac{\partial L}{\partial z})}_{=\,0 \text{ (determ. } \lambda)} \quad dz = 0$$

$$\boxed{X + \lambda \frac{\partial L}{\partial x} = 0\,, \qquad Y + \lambda \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \text{and} \quad Z + \lambda \frac{\partial L}{\partial z} = 0\,.}$$

Is the same as applying virtual vel. argument without const. to

$$\boxed{X dx + Y dy + Z dz + \lambda dL = 0\,.}$$

Additional constraints $M = 0$, $N = 0$ etc.... :

add additional terms $\mu\, dM$, $\nu\, dN$ etc... (same linear algebra)

$\Rightarrow$

“équation générale” for ALL problems of equilibria:

$$\boxed{P dp + Q dq + R dr + \ldots + \lambda dL + \mu dM + \nu dN + \ldots = 0}$$

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c + \lambda\,dL + \mu\,dM + \nu\,dN + \&c = 0,$$

Lagrange 1788 (Section IV): “Méthode très-simple”

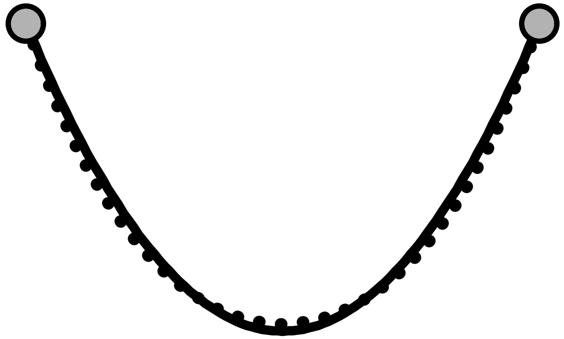
Lagrange 1811 (Section IV): “Méthode des Multiplicateurs”:

§ I.

Méthode des Multiplicateurs.

Lagrange 1811, Heading of §1, sect. IV.

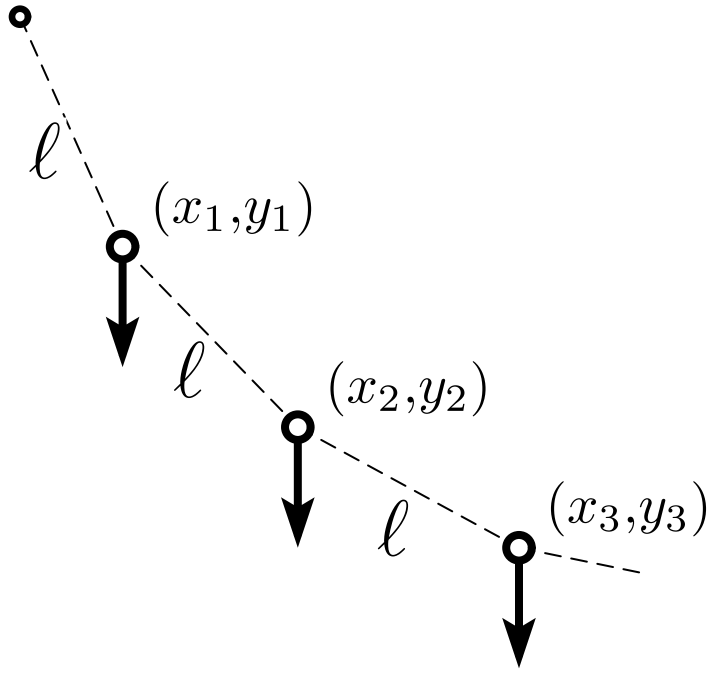
Example: The Catenary.



“une chaînette suspendue
se place presque *ad unguem*
au-dessus d’une parabole”
(G. Galilei, *Discorsi* 1638)

“dans ma jeunesse, n’ayant que 15 ans,
j’avois demontré au P. Mersenne,
que ce n’estoit pas une Parabole . . .”
(Huygens, Letter to Leibniz 1690)

Solution by Lagrange:



$$(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 - \ell^2 = 0$$
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - \ell^2 = 0$$
$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 - \ell^2 = 0$$
$$\ldots$$

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c + \lambda\,dL + \mu\,dM + \nu\,dN + \&c = 0,$$

$$dy_1 + dy_2 + \ldots + \lambda_0 \cdot d\big((x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 - \ell^2\big) + \lambda_1 \cdot d(\ldots) + \ldots = 0$$

diff. and collect coefficients of dx_2, dy_2, ...

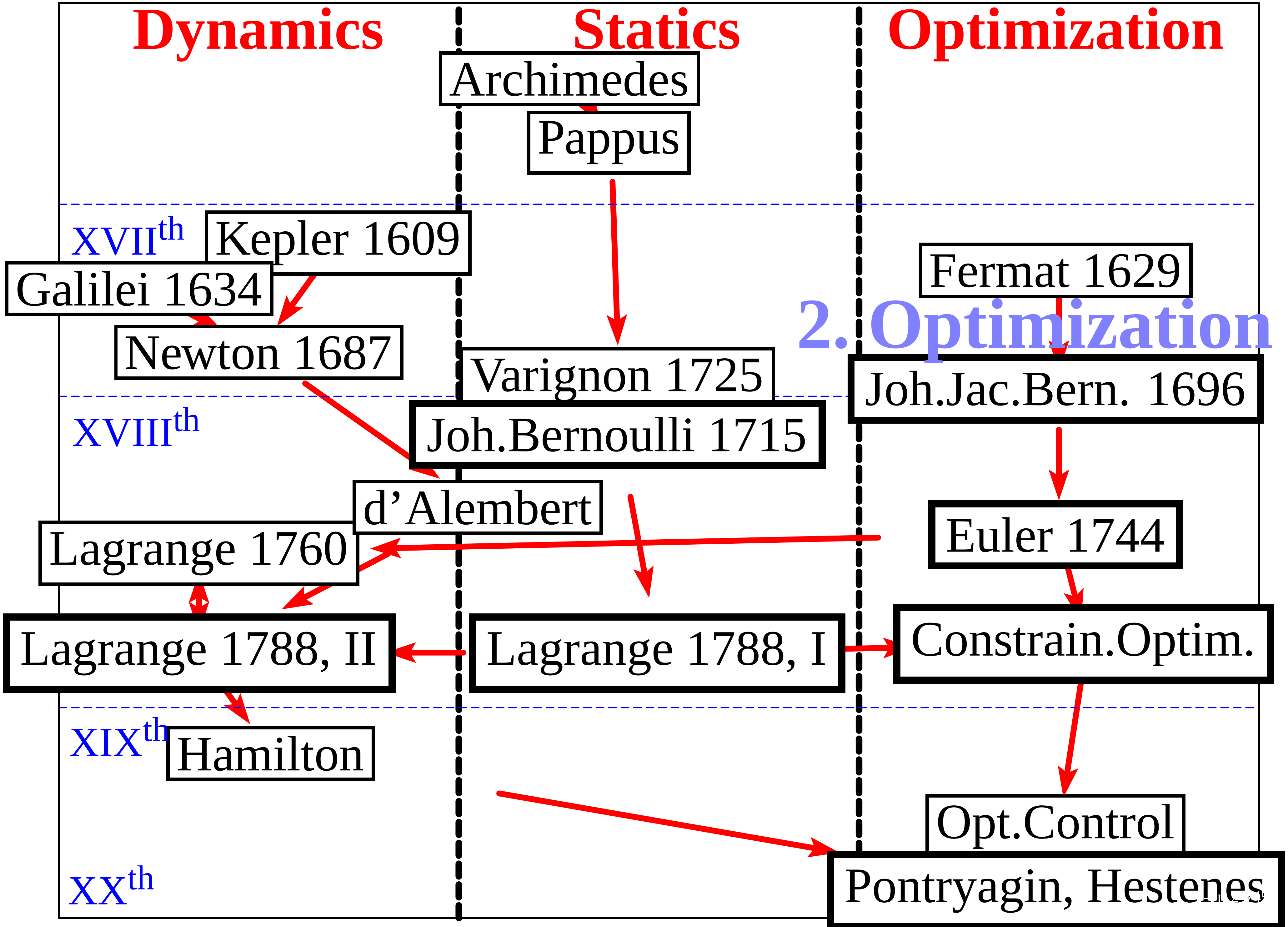
$$\lambda_2(x_2 - x_3) = \lambda_1(x_1 - x_2)$$
$$\lambda_2(y_2 - y_3) = \lambda_1(y_1 - y_2) - 1$$

$\Rightarrow$ $\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} + \text{const.}$

slope lin.f. of arc length

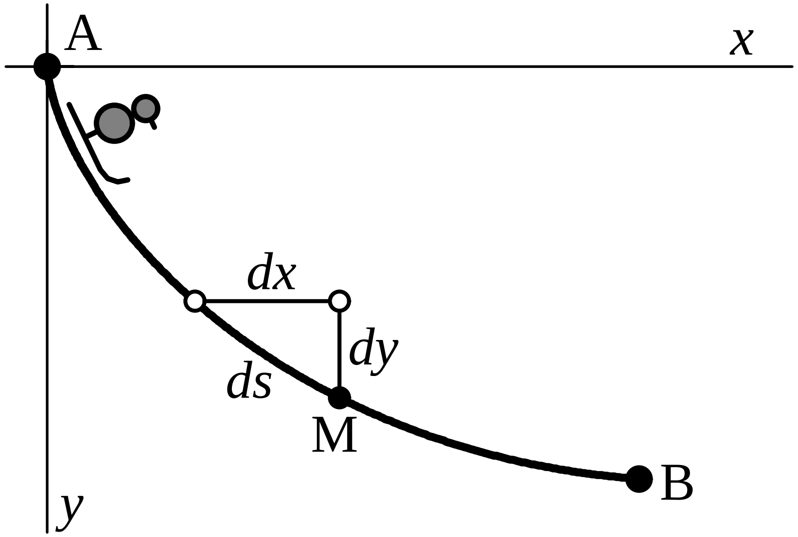
"... les formules connues de la chainette"

2. Optimization



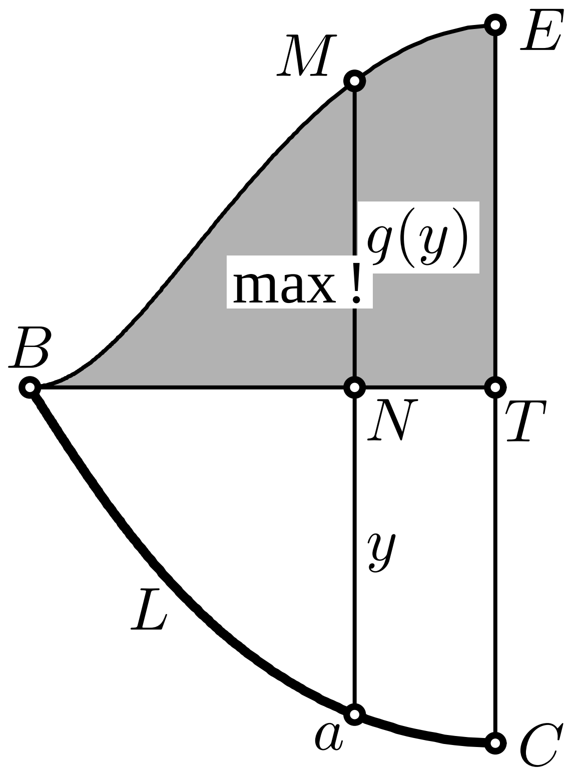
Variational Problems:

Joh. Bernoulli 1696:
"Problema novum":
(Brachystochrone)



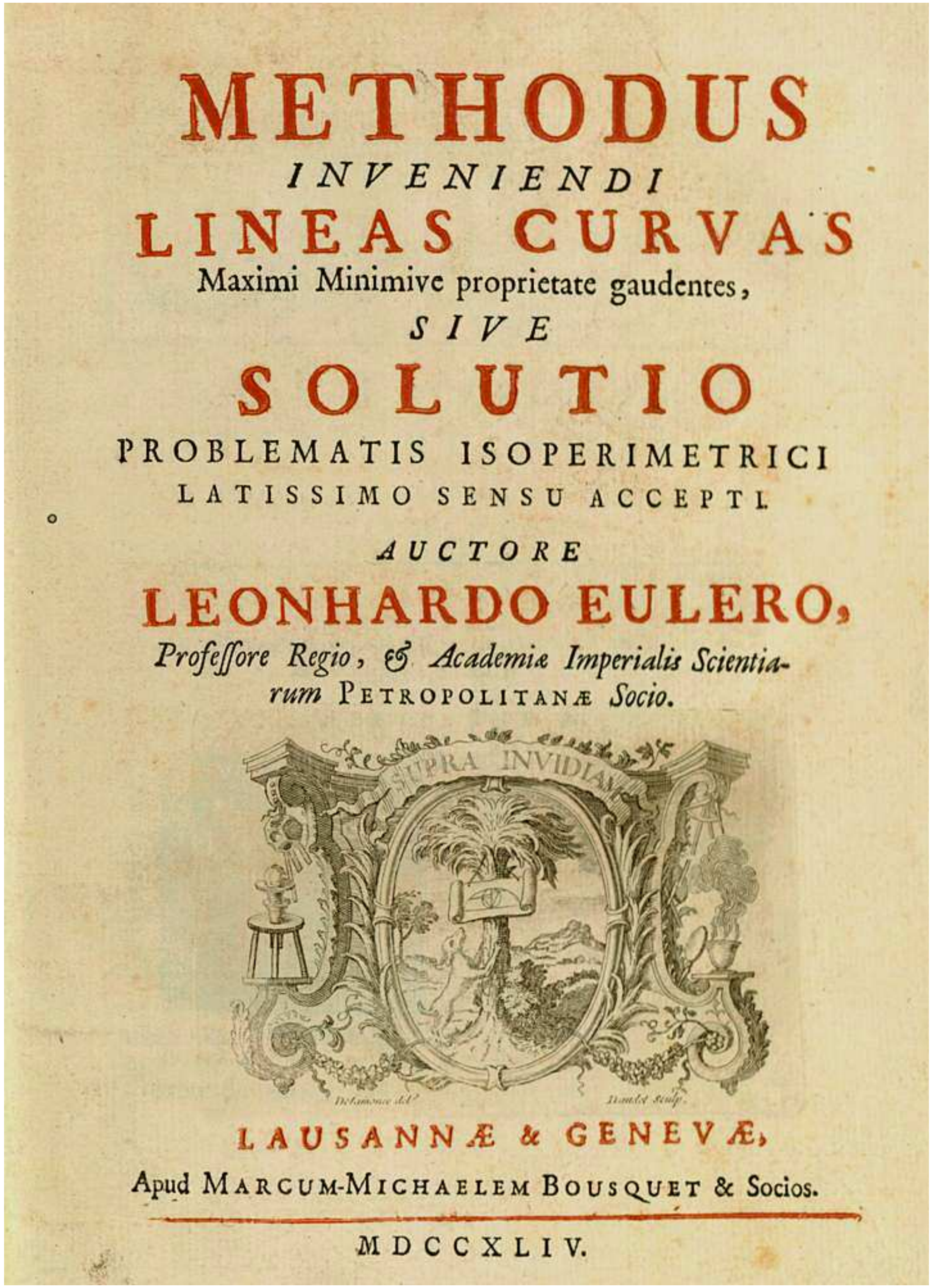
Given points A, B
find curve AMB
such that M gliding
"quam gravitate", arrives in
"brevissimo tempore" at B.

Jak. Bernoulli 1697:
"Propositione reciproca":
(isoperimetric problem)



Given points B and C
given function $g(y) : aN \mapsto MN$
find curve BaC of **given** length L,
with area $BMETNB$ maximal.

Euler's *Methodus inveniendi lineas curvas* (1744):



METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ *Socio.*

SUPRA INVIDIAM

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

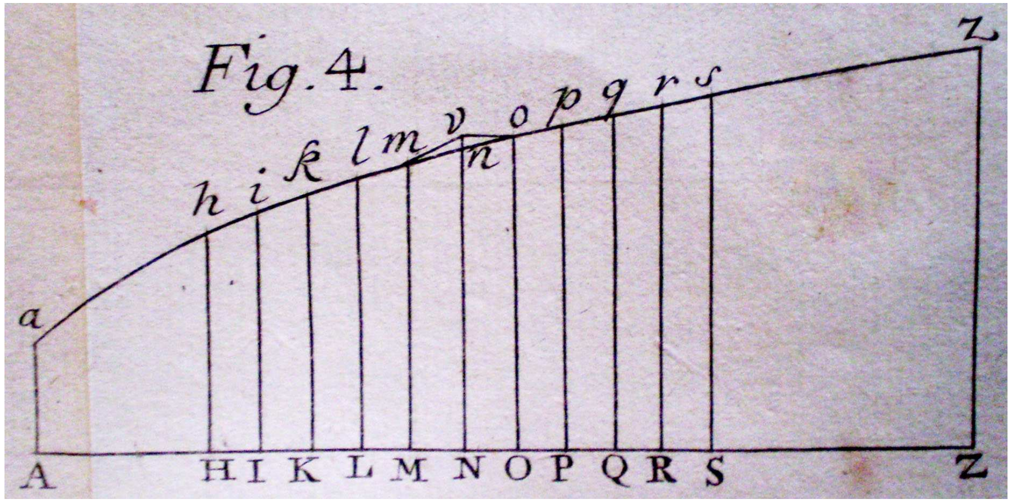
MDCCXLIV.

Euler's *Methodus inveniendi lineas curvas* (1744):

$$J = \int_a^b Z(x, y, p)\, dx = \text{min! vel max!} \quad \text{where } p = \frac{dy}{dx}$$

Euler's Solution.

1. Approximate curve by polygon



2. Approx. Integral by -sum ("Riemann")

$$Z\,dx + Z'\,dx + Z''\,dx + Z'''\,dx + \text{\&c.}$$

and diff. w.r. to ν;

3. Set derivative $(P + N'dx - P')$ to zero;

4. inverse Euler method $\Rightarrow$ $N - \frac{dP}{dx} = 0$ $\left(N = \frac{\partial Z}{\partial y},\ P = \frac{\partial Z}{\partial p}\right)$.

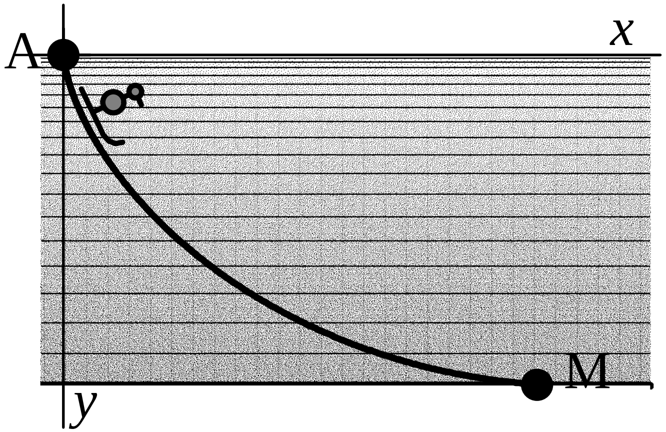
A first integration: (*Methodus*, E65, Cap. II, Art. 30, Schol. I):

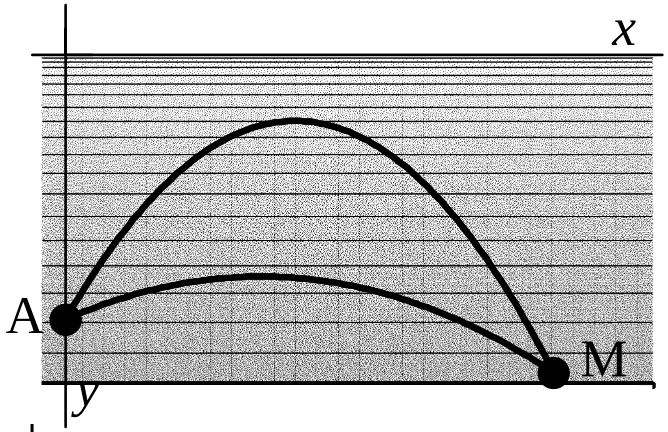
If "in functione Z omnino non insit x.." $\Rightarrow Z(y,p)$:

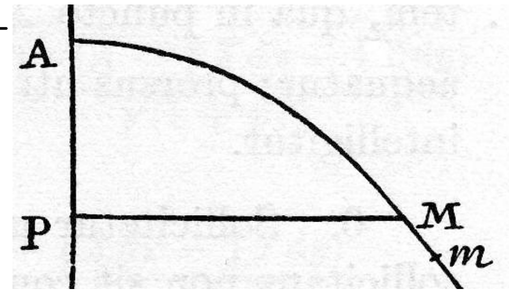
Mult. $N\,dx - dP = 0$ by p and subtr. from $dZ = N\,dy + P\,dp$:

$$dZ - (P\,dp + p\,dP) = 0 \Rightarrow \boxed{Z - p\cdot P = \text{Const.}}$$

Exemplum: "Mobile per quam gravitate" from A to M ($u = \sqrt{y}$):







Drawing by Euler

Least **time:** (Cap. II, Art. 35)

$$\int \frac{ds}{u} = \int \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{y}}\,dx = \min!$$

$$\Rightarrow dx = \sqrt{\frac{y}{c-y}}\cdot dy$$

"curva satisfaciens Cyclois"

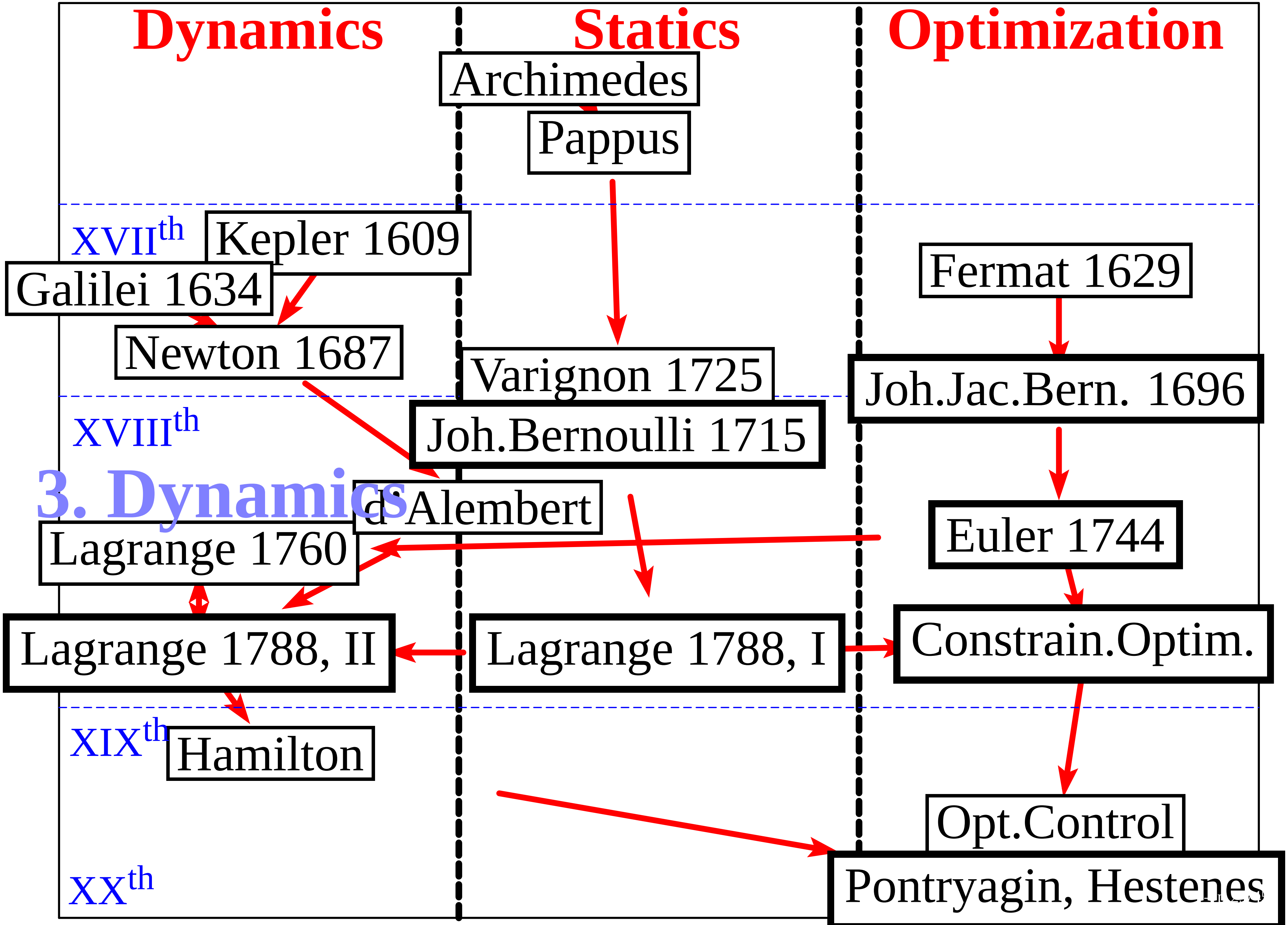
Least **action:** (Additamentum II)

$$\int u\,ds = \int \sqrt{y}\sqrt{1+p^2}\,dx = \min!$$

$$\Rightarrow x - a = 2\sqrt{c\,(y-c)}$$

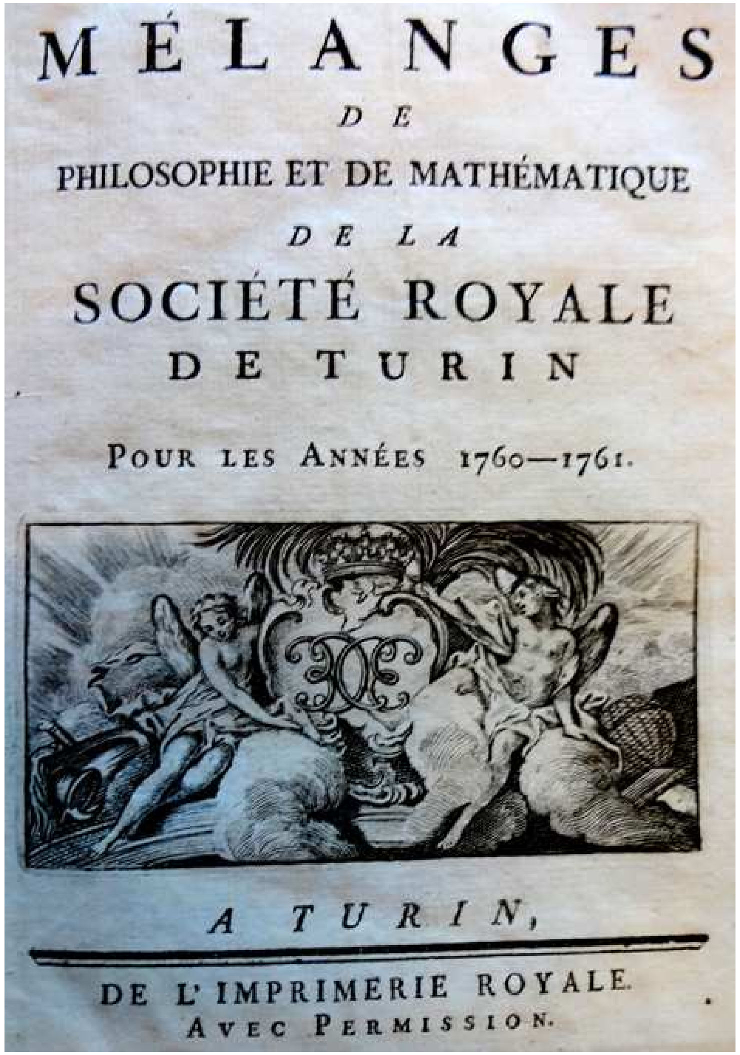
"Manifestum ... aequationem esse pro Parabola."

3. Dynamics



Dynamics
Statics
Optimization
Archimedes
Pappus
XVII^th
Kepler 1609
Galilei 1634
Newton 1687
Fermat 1629
Varignon 1725
Joh.Jac.Bern. 1696
XVIII^th
Joh.Bernoulli 1715
3. Dynamics
d'Alembert
Euler 1744
Lagrange 1760
Lagrange 1788, II
Lagrange 1788, I
Constrain.Optim.
XIX^th
Hamilton
Opt.Control
XX^th
Pontryagin, Hestenes

Lagrange 1760, opus 6 and 7: (Misc. Taurinensia, vol. II.)



MÉLANGES

DE

PHILOSOPHIE ET DE MATHÉMATIQUE

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE

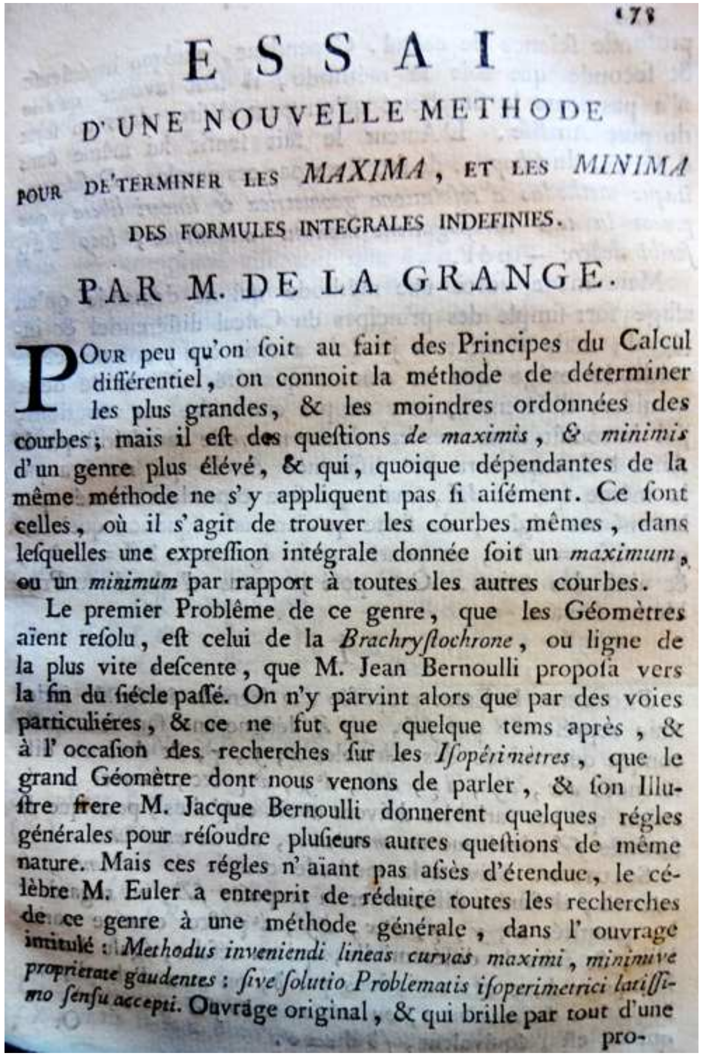
DE TURIN

POUR LES ANNÉES 1760—1761.

A TURIN,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

AVEC PERMISSION.



178

ESSAI

D'UNE NOUVELLE METHODE

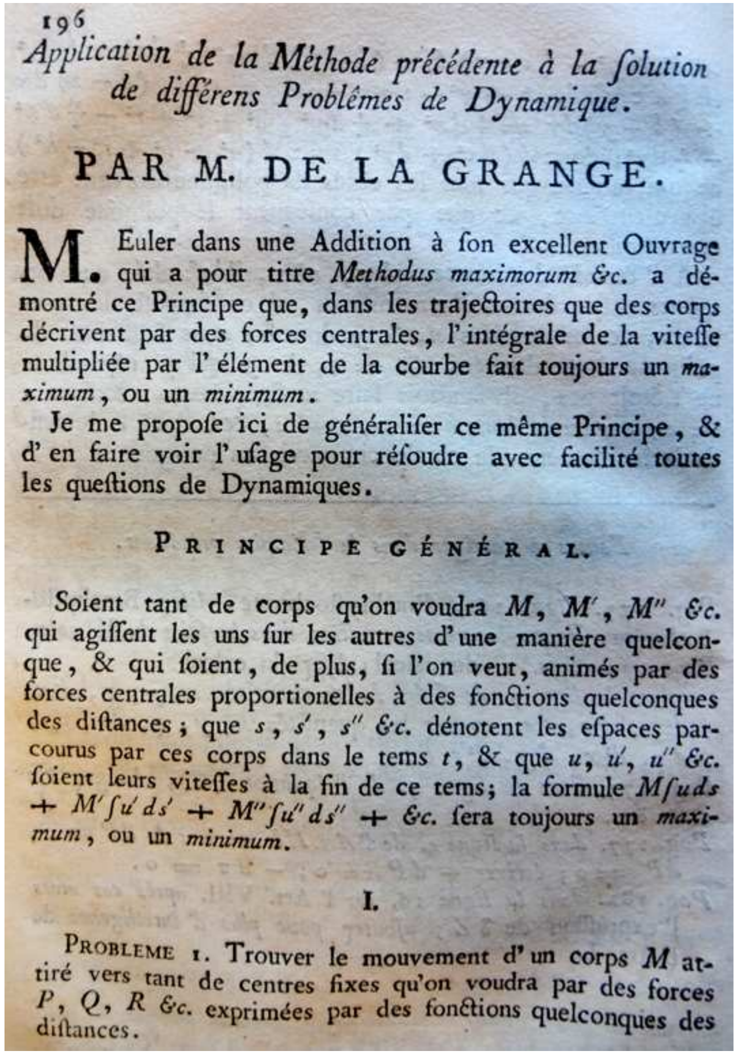
POUR DE'TERMINER LES *MAXIMA*, ET LES *MINIMA*

DES FORMULES INTEGRALES INDEFINIES.

PAR M. DE LA GRANGE.

POUR peu qu'on ſoit au fait des Principes du Calcul différentiel, on connoit la méthode de déterminer les plus grandes, & les moindres ordonnées des courbes; mais il eſt des queſtions *de maximis*, & *minimis* d'un genre plus élévé, & qui, quoique dépendantes de la même méthode ne s'y appliquent pas ſi aiſément. Ce ſont celles, où il s'agit de trouver les courbes mêmes, dans leſquelles une expreſſion intégrale donnée ſoit un *maximum*, ou un *minimum* par rapport à toutes les autres courbes.

Le premier Problême de ce genre, que les Géomètres aïent reſolu, eſt celui de la *Brachryſtochrone*, ou ligne de la plus vite deſcente, que M. Jean Bernoulli propoſa vers la fin du ſiécle paſſé. On n'y parvint alors que par des voies particuliéres, & ce ne fut que quelque tems après, & à l'occaſion des recherches ſur les *Iſopérimètres*, que le grand Géomètre dont nous venons de parler, & ſon Illuſtre frere M. Jacque Bernoulli donnerent quelques régles générales pour réſoudre pluſieurs autres queſtions de même nature. Mais ces régles n'aïant pas aſsès d'étendue, le célèbre M. Euler a entreprit de réduire toutes les recherches de ce genre à une méthode générale, dans l'ouvrage intitulé : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi, minimive proprietate gaudentes : ſive ſolutio Problematis iſoperimetrici latiſſimo ſenſu accepti.* Ouvrage original, & qui brille par tout d'une pro-



196

Application de la Méthode précédente à la ſolution de différens Problêmes de Dynamique.

PAR M. DE LA GRANGE.

M. Euler dans une Addition à ſon excellent Ouvrage qui a pour titre *Methodus maximorum &c.* a démontré ce Principe que, dans les trajectoires que des corps décrivent par des forces centrales, l'intégrale de la viteſſe multipliée par l'élément de la courbe fait toujours un *maximum*, ou un *minimum*.

Je me propoſe ici de généraliſer ce même Principe, & d'en faire voir l'uſage pour réſoudre avec facilité toutes les queſtions de Dynamiques.

PRINCIPE GÉNÉRAL.

Soient tant de corps qu'on voudra M, M', M'' &c. qui agiſſent les uns ſur les autres d'une manière quelconque, & qui ſoient, de plus, ſi l'on veut, animés par des forces centrales proportionelles à des fonctions quelconques des diſtances; que s, s', s'' &c. dénotent les eſpaces parcourus par ces corps dans le tems t, & que u, u', u'' &c. ſoient leurs viteſſes à la fin de ce tems; la formule $M\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + M''\int u''\,ds''$ + &c. ſera toujours un *maximum*, ou un *minimum*.

I.

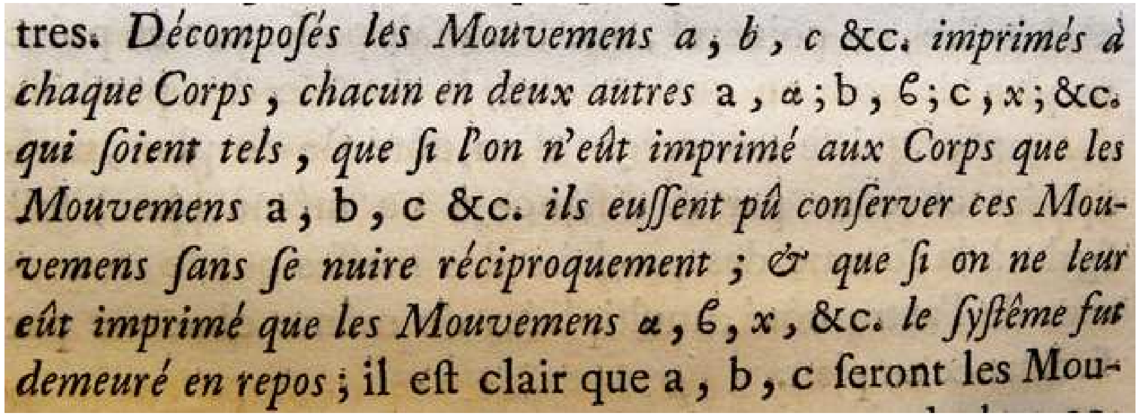
PROBLEME 1. Trouver le mouvement d'un corps M attiré vers tant de centres fixes qu'on voudra par des forces P, Q, R &c. exprimées par des fonctions quelconques des diſtances.

Starts right away with "Principe Général" for **several** bodies

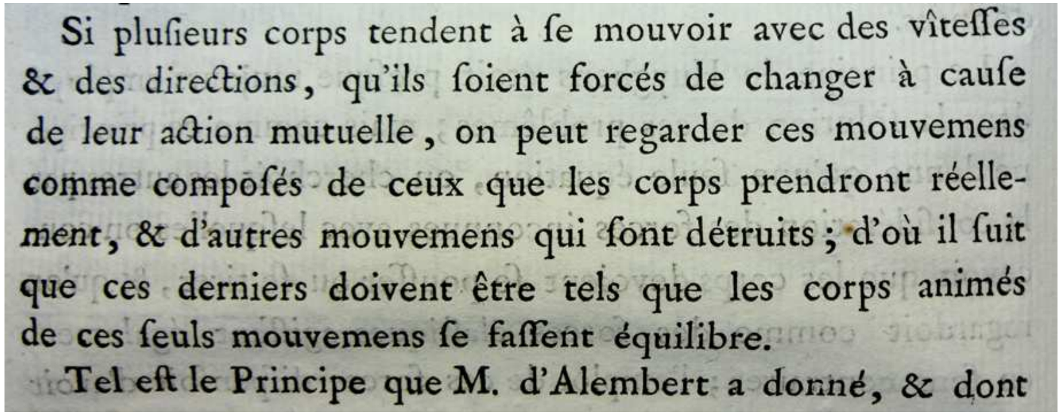
$$M\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + M''\int u''\,ds'' + \ldots = \text{maxmin!}$$

"et d'en faire voir l'usage pour résoudre avec facilité toutes les questions de Dynamique."

Lagrange 1788: Use d'Alembert's Principle (Paris 1743):

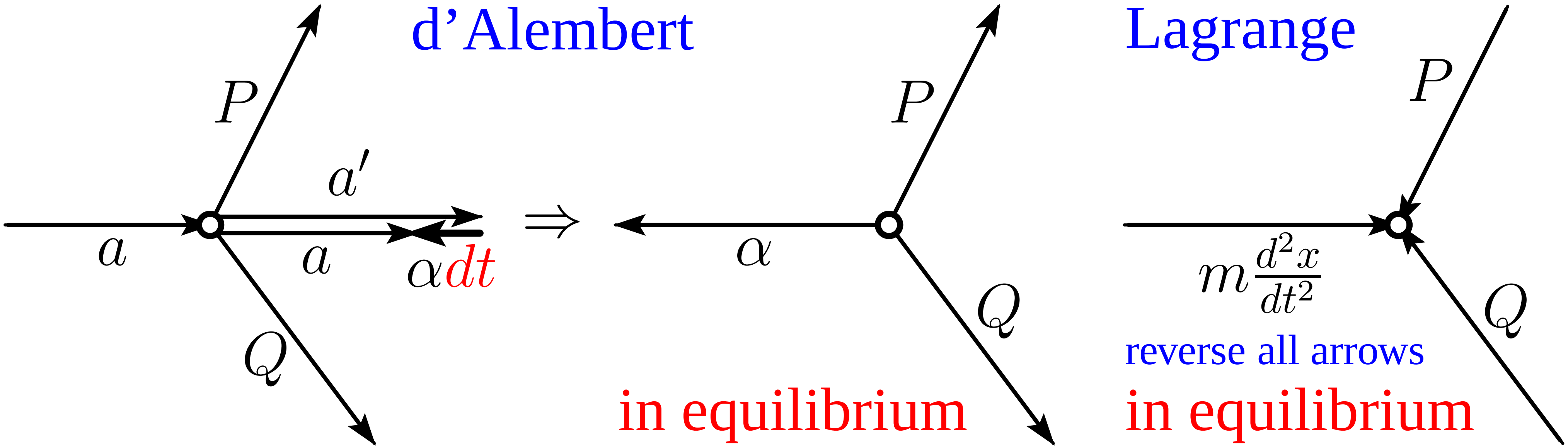


tres. *Décompoſés les Mouvemens a, b, c &c. imprimés à chaque Corps, chacun en deux autres* a, α; b, ϐ; c, x; &c. *qui ſoient tels, que ſi l'on n'eût imprimé aux Corps que les Mouvemens* a, b, c &c. *ils euſſent pû conſerver ces Mouvemens ſans ſe nuire réciproquement; & que ſi on ne leur eût imprimé que les Mouvemens α, ϐ, x, &c. le ſyſtême fut demeuré en repos*; il eſt clair que a, b, c feront les Mou-



Si pluſieurs corps tendent à ſe mouvoir avec des vîteſſes & des directions, qu'ils ſoient forcés de changer à cauſe de leur action mutuelle, on peut regarder ces mouvemens comme compoſés de ceux que les corps prendront réellement, & d'autres mouvemens qui ſont détruits; d'où il ſuit que ces derniers doivent être tels que les corps animés de ces ſeuls mouvemens ſe faſſent équilibre.

Tel eſt le Principe que M. d'Alembert a donné, & dont



"Le *Traité de Dynamique* de M. d'Alembert, ... parut en 1743, ... Cette méthode réduit toutes les loix du mouvement des corps à celles de leur équilibre, & ramene ainsi la Dynamique à la Statique" (Lagrange 1788, Seconde Partie, p. 179)

Way to general formula for all problems of dynamics:

"Dans la première partie de cet Ouvrage,
nous avons réduit toute la Statique à une seule formule générale..."

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c = 0.$$

formule générale de l'équilibre d'un

Bernoulli's regle as written by Lagrange 1788, part I

$$\Downarrow$$

"On pourra donc aussi réduire à une formule générale toute la Dynamique; ..."

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z + P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \&c.\right) m = 0,$$

General equation for dynamics, Lagrange 1788, part II

So-called "Newton's Equations" (Lagrange 1788, Section III):

Suppose that, as above,

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

ect. citée), cette formule devient

$$S\left(\frac{d^2 x}{dt^2} + X\right) m\,\delta x + S\left(\frac{d^2 y}{dt^2} + Y\right) m\,\delta y + S\left(\frac{d^2 z}{dt^2} + Z\right) m\,\delta z = 0;$$

Et de-là on tire ſur le champ ces trois équations générales,

$$S\left(\frac{d^2 x}{dt^2} + X\right) m = 0,$$

$$S\left(\frac{d^2 y}{dt^2} + Y\right) m = 0,$$

$$S\left(\frac{d^2 z}{dt^2} + Z\right) m = 0,$$

Where are the so-called "Lagrangian Equations" ?

$q = (q_1, \ldots, q_d)^T$	generalized coordinates
$T = T(q, \dot q)$	(cinet. energy, often $\frac{1}{2}\dot q^T M(q)\dot q$)
$U = U(q)$	(potential energy)
$L = T - U$	Lagrangian
$\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \text{min!}$	so-called Hamilton Principle
$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\Big) = \frac{\partial L}{\partial q}\,.$	Lagrangian eqs.

$$\Xi = d.\,\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi} + \frac{\delta V}{\delta \xi}$$

$$\Psi = d.\,\frac{\delta T}{\delta d\psi} - \frac{\delta T}{\delta \psi} + \frac{\delta V}{\delta \psi}$$

$$\Phi = d.\,\frac{\delta T}{\delta d\varphi} - \frac{\delta T}{\delta \varphi} + \frac{\delta V}{\delta \varphi}$$

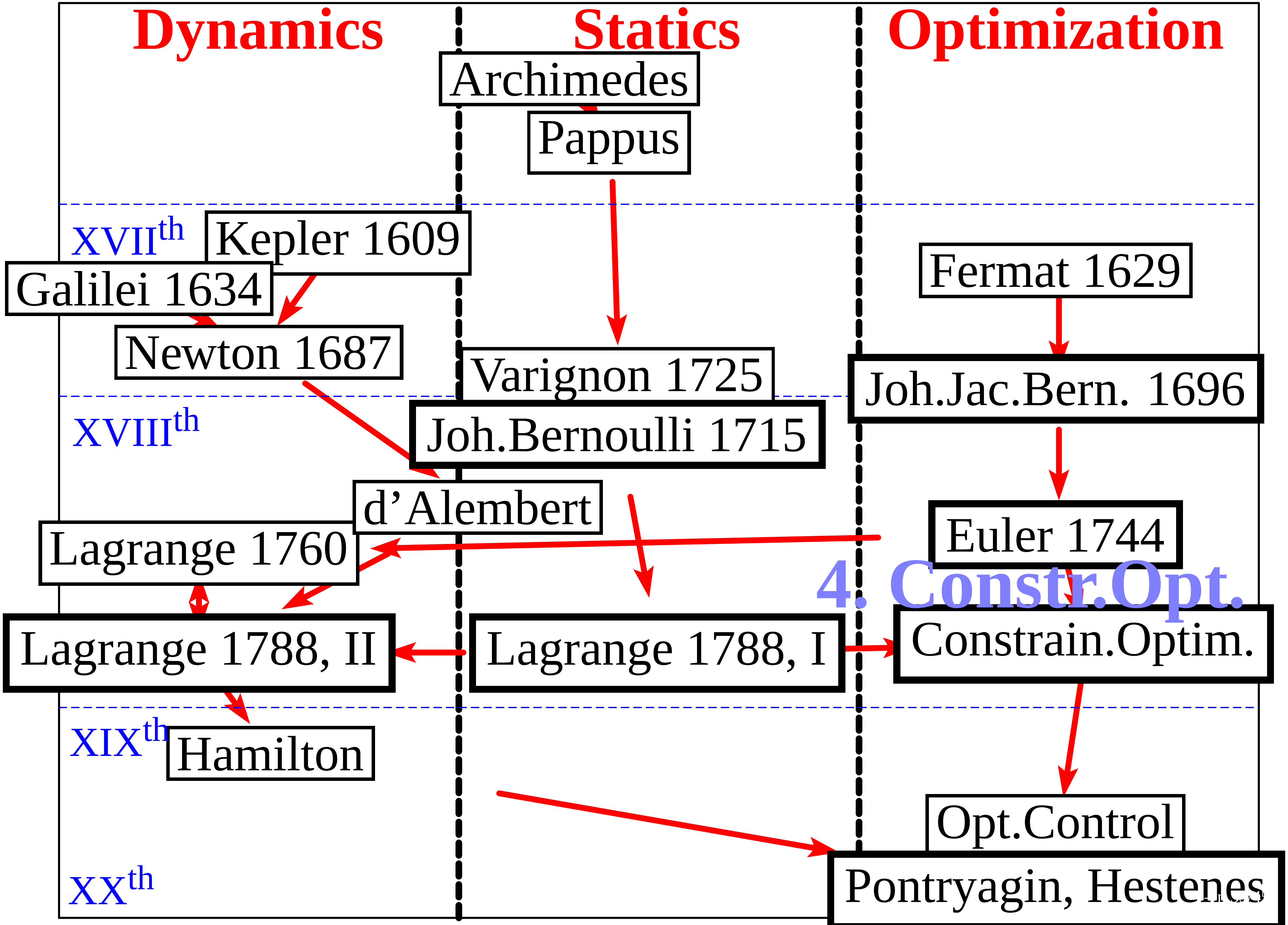
&c,

ɔofant

$$T = S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2}\right) m,\quad V = S\,\Pi\, m,$$

Somewhere hidden in
in long coordinate transformations
Lagrange 1788, Seconde partie,
Sect. IV, Art. 9 (p. 226).
(Art. 10 in Lagrange 1811).

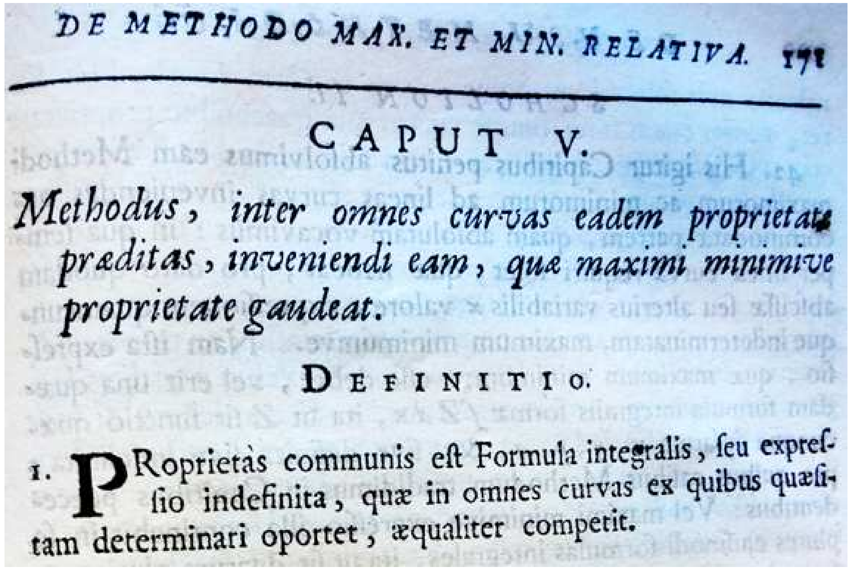
4. Constrained Optimization



Constrained Variat. Problems: (with “proprietate præditas”)

$$J = \int_a^b Z(x, y, p)\, dx = \text{minmax!} \quad \text{with} \quad \int_a^b L(x, y, p)\, dx = 0.$$

Euler’s *Methodus*, Chap. V: entirely new theory (16 pages), changing values of y two-by-two to respect the constaint:


DE METHODO MAX. ET MIN. RELATIVA. 171

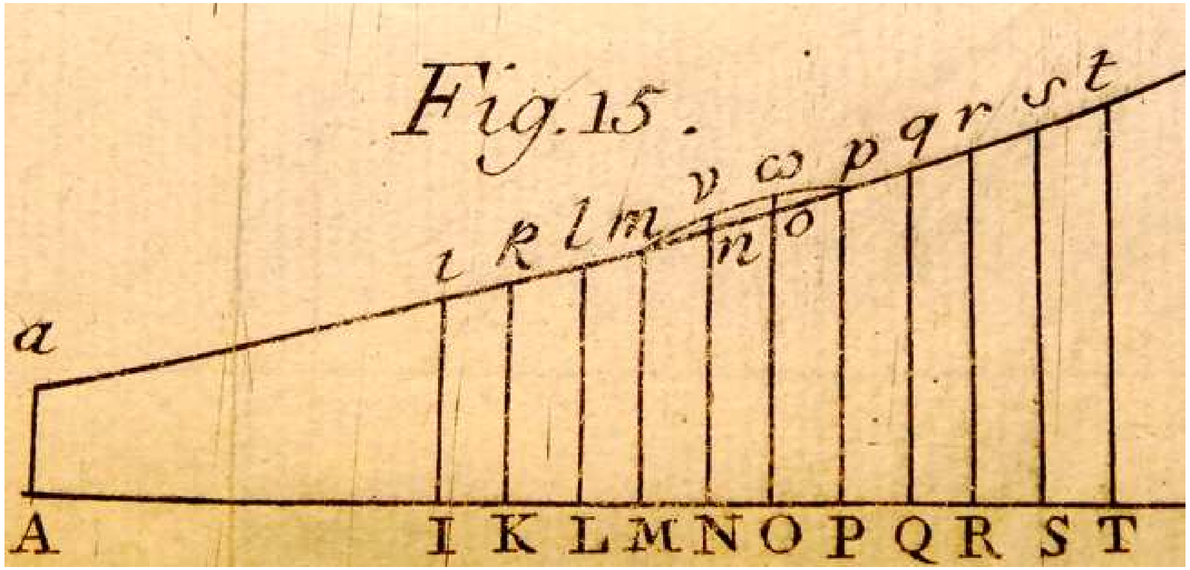
CAPUT V.

Methodus, inter omnes curvas eadem proprietate præditas, inveniendi eam, quæ maximi minimive proprietate gaudeat.

DEFINITIO.

1. PRoprietas communis est Formula integralis, seu expressio indefinita, quæ in omnes curvas ex quibus quæsitam determinari oportet, æqualiter competit.

Begin of Euler’s “Caput V”



Drawing in Euler’s Caput V

Constrained Variat. Problems: (with “proprietate prædita”)

$$J = \int_a^b Z(x, y, p)\, dx = \text{minmax!} \quad \text{with} \quad \int_a^b L(x, y, p)\, dx = 0.$$

Lagrange 1811:

§ III.

Analogie des problèmes de ce genre avec ceux de maximis et minimis.

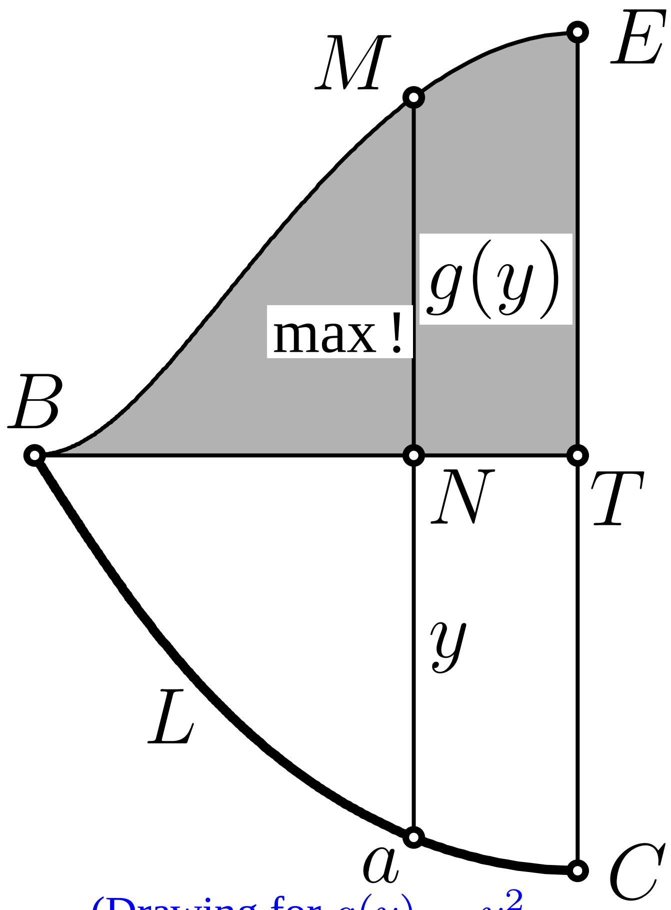
Heading of §3 in Section IV of Lagrange (1811)

Lagrange 1788 (Sect. V): Solve without constraints

$$J = \int_a^b \left[Z(x, y, p) + \lambda L(x, y, p)\right] dx = \text{minmax.}$$

Many examples. Here (Euler, §41 of E65, Caput V):

Solution of Jakob's Challenge by Lagrange multipliers:



(Drawing for $g(y) = y^2$
Integral calculated numerically)

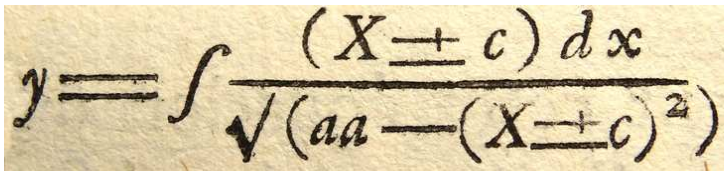
$$\int_0^1 \left(g(y) + \lambda(\sqrt{1+p^2} - L)\right) dx = \text{max!}$$

Euler's diff. equation $\boxed{Z - p \cdot \frac{\partial Z}{\partial p} = \text{Const}}$ becomes:

$$g(y) + \frac{\lambda}{\sqrt{1+p^2}} = C + \lambda L\,.$$

separation of variables:

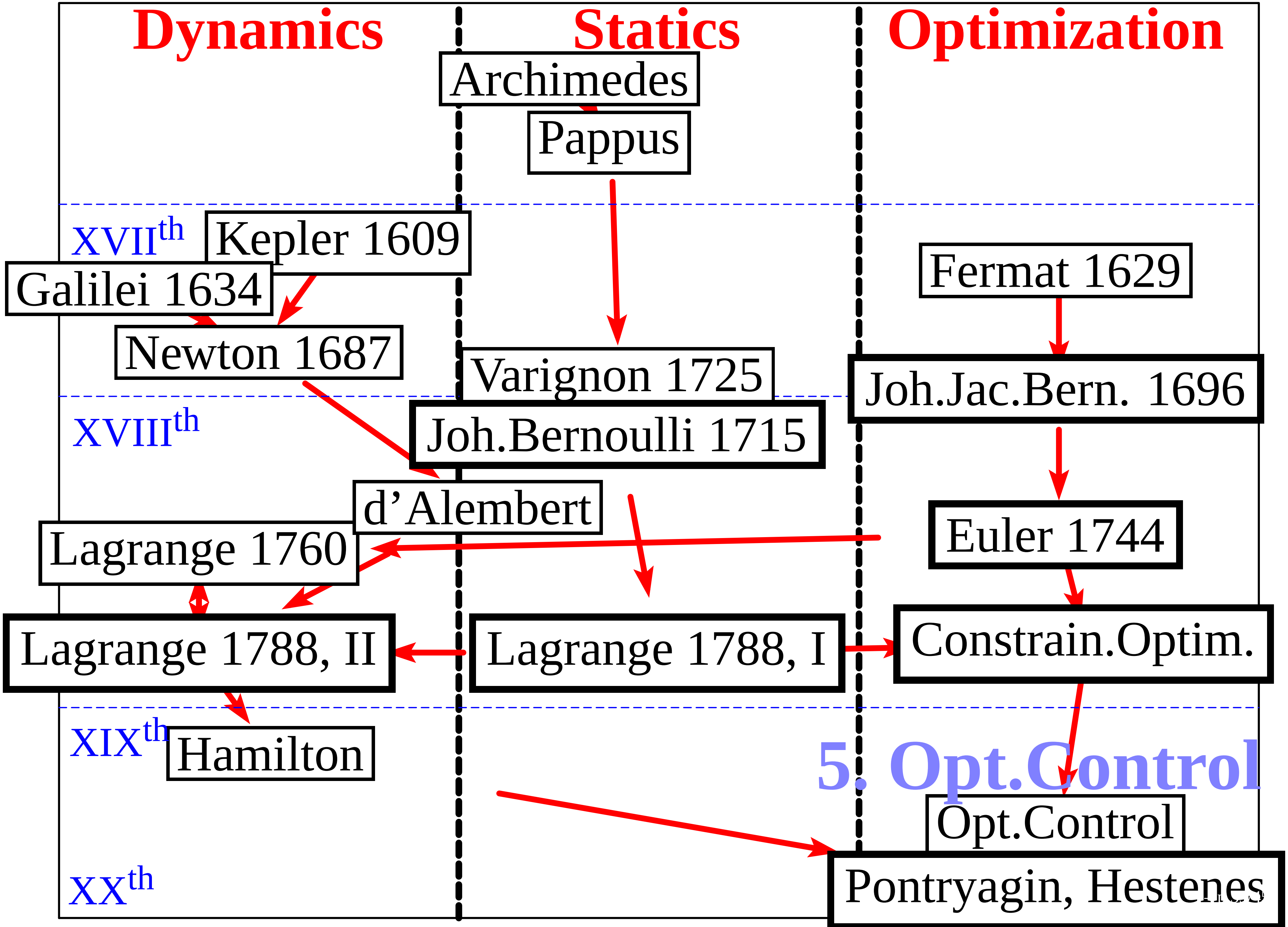
$$\int \frac{g(y) + K}{\sqrt{\lambda^2 - (g(y)+K)^2}}\, dy = x + c\,.$$

Bernoulli 1718: 

$$y = \int \frac{(X \pm c)\, dx}{\sqrt{(aa - (X \pm c)^2)}}$$

Only for $g(y) = y$ the integral has an analytic solution (Euler in §41 of E65, Caput V: "quae est aequatio generalis pro Circulo").

5. Optimal Control

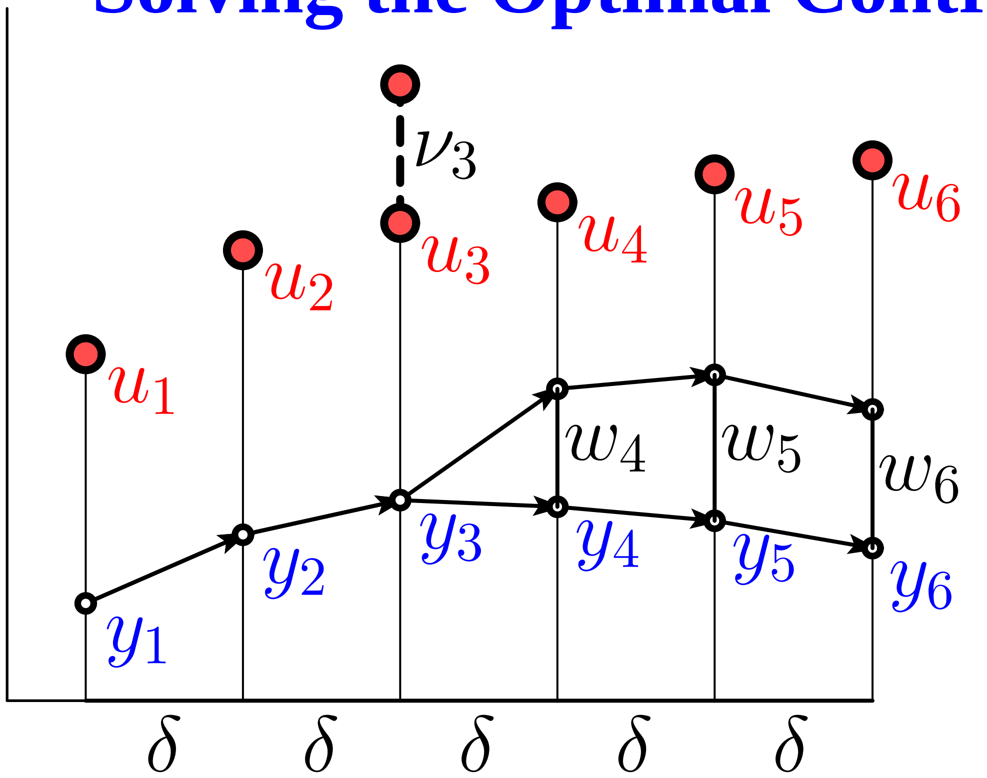


Optimal Control Problems. Search control $u(x)$ with

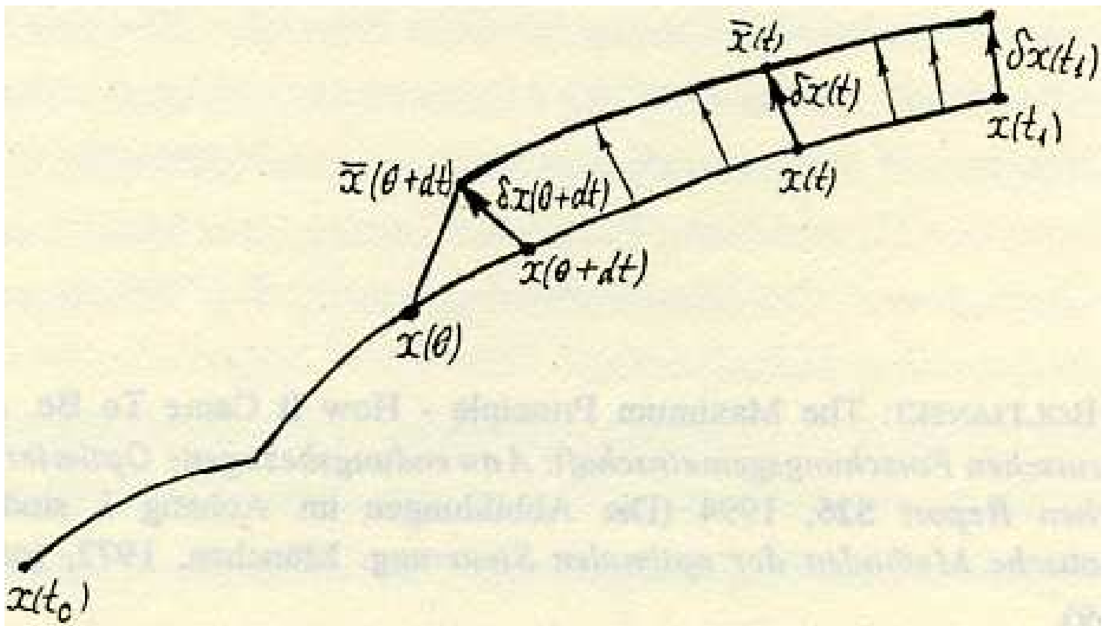
(1)	(2)	(3)
$\int_a^b k(x,y,u)\,dx = \text{mimax.}$	$\frac{dy}{dx} = f(x,y,u),$	$y(a)=A,\ y(b)=B.$
optimize!	diff.equation with control u	Bound.cond

... and many variants.

Solving the Optimal Control Problem *à la* Euler :



$w_4 = \delta\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\nu_3,\ w_5 = (1+\delta\frac{\partial f}{\partial y})\cdot w_4, \ldots$



Pontryagin, Gamkrelidze, Boltyanski $>$ 1952
Drawing by V.G.Boltyanskii, *How It Came To Be*, 1994
(copied from M.Plail, *Die Entwicklung ...*, p. 249)

Solving Optimal Control with Lagrange multipliers :

$$\int_a^b k(x,y,u)\,dx = \text{mimax.} \;\Big|\; \frac{dy}{dx} = f(x,y,u), \;\Big|\; y(a)=A,\, y(b)=B.$$

Idea: multiply point wise condition $y' = f(x,y,u)$ with a Lagrange multiplier function $\ell(x)$;

$\Rightarrow$ unconstr. opt. prob. with $Z(x,\ell,y,p,u)$; apply Euler:

$$\int_a^b \{k(x,y,u) + [p^T - f^T(x,y,u)]\cdot \ell(x)\}\,dx = \text{minmax!}$$

$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial \ell} = 0} \quad : \quad y'(x) = f(x,y,u)$$

$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial Z}{\partial p} = 0} \quad : \quad \ell'(x) = \frac{\partial k}{\partial y}(x,y,u) - \frac{\partial f}{\partial y}^T(x,y,u)\cdot \ell(x)$$

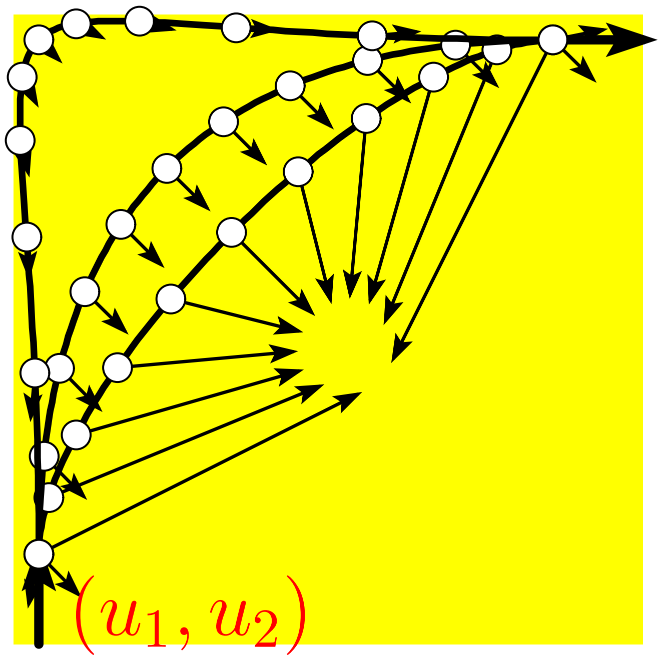
$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial u} = 0} \quad : \quad 0 = \frac{\partial k}{\partial u}(x,y,u) - \frac{\partial f}{\partial u}^T(x,y,u)\cdot \ell(x)$$

DAE system ...

Little Example : A body gliding in R^2 should receive new direction with control $(u_1(t), u_2(t)), 0 \le t \le T$

using minimal energy $\min \int_0^T \sum u_i^2 \, dt$

(the speaker's handwriting assisting a seminar talk by M. Chyba, Geneva 2006)



$$
\begin{array}{lll}
\dot{y}_1 = y_3 & \dot{\ell}_1 = 0 & \\
\dot{y}_2 = y_4 & \dot{\ell}_2 = 0 & u_1 - \ell_3 = 0 \\
\dot{y}_3 = u_1 & \dot{\ell}_3 = -\ell_1 & u_2 - \ell_4 = 0 \\
\dot{y}_4 = u_2 & \dot{\ell}_4 = -\ell_2 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow \ell_1, \ell_2 =$ const, $\ell_3, \ell_4 = u_1, u_2 =$ linear, $y_3, y_4 =$ quadratic

the solution curves are thus, not surprisingly, cubic splines.

Example: $T = 2,\ 4,\ 8$ with $E = 2,\ 0.25,\ 0.21875.$

Transform to a Hamiltonian System :

$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial \ell} = 0} \quad : \quad y'(x) = f(x, y, u)$$

$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial Z}{\partial p} = 0} \quad : \quad \ell'(x) = \frac{\partial k}{\partial y}(x, y, u) - \frac{\partial f}{\partial y}^T(x, y, u) \cdot \ell(x)$$

$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial u} = 0} \quad : \quad 0 = \frac{\partial k}{\partial u}(x, y, u) - \frac{\partial f}{\partial u}^T(x, y, u) \cdot \ell(x)$$

Idea: define function $H(x, y, \ell, u)$ by $\boxed{H = k - \sum_i f_i \cdot \ell_i}$

$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial \ell} = 0} \quad : \quad y'(x) = -\frac{\partial H}{\partial \ell}$$

$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial Z}{\partial p} = 0} \quad : \quad \ell'(x) = \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial u} = 0} \quad : \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial u}$$

First two sets of equations : *Hamiltonian system*,
The last condition means that ...

Pontryagin maximum principle:

$$\boxed{H = k - \sum_i f_i \cdot \ell_i}$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{\partial H}{\partial \ell} \\ \ell'(x) &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u} \end{aligned}$$

The control u maximizes H along the trajectory .

Priority disputes between Pontryagin and Boltyanskii (Plail).

Pontryagin maximum principle:

$$\boxed{H = k - \sum_i f_i \cdot \ell_i}$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{\partial H}{\partial \ell} \\ \ell'(x) &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u} \end{aligned}$$

The control u maximizes H along the trajectory .

Priority disputes between Pontryagin and Boltyanskii (Plail).

Surprise: same Hamiltonian already in Carathéodory (1926):

$$H(t, x_i, y_i) = -M(t, x_j, \varphi_j, \chi_{k'}) + \sum_j y_j \varphi_j,$$

$$\dot{x}_i = H_{y_i}, \quad \dot{y}_i = -H_{x_i}$$

Pontryagin (1908 – 1988)

xie xie. $E\upsilon\chi\alpha\rho\iota\sigma\tau\omega$. Спасибо.